Математички факултет
Универзитет у Београду

Електронске лекције о диференцијалним једначинама креиране коришћењем програмског пакета ГеоГебра

-мастер рад-

Ментор:
доц. др Мирослав Марић

Студент:
Марина Чворић
1017/2012

Београд, 2013.

Предговор

Диференцијалне једначине су се појавиле као математички модели у решавању важних природних и техничких проблема, још у време Њутна и Лајбница, односно у време открића диференцијалног и интегралног рачуна. Исак Њутн је у свом делу ,,Метода флуксија и бесконачних редова" 1671. г. указао на значај диференцијалних једначина и на начин решавања неких типова. Он је извршио поделу диференцијалних једначина I реда у три групе. Прве две су данас познате као обичне диференцијалне једначине, а трећа група су парцијалне диференцијалне једначине.
Даљем развоју теорије диференцијалних једначина и методама њиховог решавања допринели су и други познати математичари: браћа Бернули, Јохан и Јакоб, Лагранж, Клеро, Ојлер, Лаплас...

Како су диференцијалне једначине у данашње време присутне у разним научним областима, а посебно у физици, техничким наукама, хемији, биологији, економији, тако је један од циљева овог мастер рада и да се укаже на неке могућности практичне примене теорије диференцијалних једначина.

Сам рад је реализован у виду електронских лекција и готово сваку лекцију прати одређен број аплета креираних коришћењем програмског пакета ГеоГебра. Циљ овог рада је да прикаже један нови приступ теорији диференцијалних једначина, уз интерактивне садржаје и детаљно урађене примере са одговарајућим графичким приказом решења и анимацијама у ГеоГебри. Рад је подељен на шест поглавља на следећи начин:

Прво поглавље, ,,Основни појмови о диференцијалним једначинама", даје дефиниције појма диференцијалне једначине и њених решења, затим се дефинише Кошијев проблем за дату једначину уз илустрацију решења у ГеоГебри. Представљене су и теореме о егзистенцији и јединствености решења Кошијевог проблема, као и геометријска интерпретација решења коју прати анимација креирана у ГеоГебри.

Друго поглавље, ,,Диференцијалне једначине I реда", бави се основним типовима диференцијалних једначина I реда: једначина са раздвојеним променљивим, хомогена једначина, једначина која се своди на хомогену, линеарна једначина, Бернулијева једначина, једначина тоталног диференцијала, интеграциони фактор, једначина I реда вишег степена, једначине које се решавају параметризацијом. За сваки тип једначине је приказан детаљан метод решавања. На крају сваке лекције се налазе примери који илуструју претходно изложену теорију са одговарајућим анимацијама у ГеоГебри.

Треће поглавље, ,, Диференцијалне једначине вишег реда", посвећено је линеарним диференцијалним једначинама n-тог реда са константним коефицијентима и са функционалним коефицијентима. Дате су методе за њихово решавање, као и примери који илуструју примену тих метода и графички прикази решења у ГеоГебри.

Четврто поглавље, ,,Решавање диференцијалних једначина помоћу редова", приказује још једну методу за решавање диференцијалних једначина где је решење тражено у облику степеног реда.

Пето поглавље, ,,Лапласове трансформације", бави се дефинисањем Лапласове и инверзне Лапласове трансформације и њихових основних особина. Акценат је на примени Лапласове трансформације на решавање диференцијалних једначина и система диференцијалних једначина.
Као прилог су дате таблице Лапласових и инверзних Лапласових трансформација неких важнијих функција.

Шесто поглавље, ,,Примена обичних диференцијалних једначина", садржи примере који илуструју могућности практичне примене диференцијалних једначина. То су примене у аналитичкој геометрији, у физици и другим областима (економији, биологији, хемији). Примере прате одговарајуће анимације креиране у ГеоГебри.

На крају рада је дат закључак и наведена је литература која је коришћена при изради мастер рада.

Овом приликом желим да се захвалим свом ментору доц. др Мирославу Марићу, на корисним сугестијама и примедбама, као и члановима комисије: проф. др Александру Такачију на уступљеним материјалима и проф. др Небојши Лажетићу на сарадњи.

Марина Чворић

У Београду, 2013. године

Садржај

1 Основни појмови о диференцијалним једначинама

1.1 Дефиниција диференцијалних једначина

Диференцијална једначина у односу на неку функцију је једначина која повезује ту функцију, њене независно промењиве и њене изводе.

Дефиниција 1.1. *Једначину*

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

где је F *реална функција* m*,* $m \leq n+2$*, реалних промењивих, у којој фигурише бар један од извода непознате функције* $y = y(x)$*, називамо* **обична диференцијална једначина**.

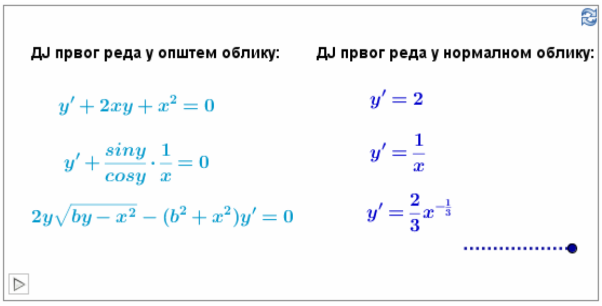
Дефиниција 1.2. *Ред диференцијалне једначине представља ред највишег извода који се појављује у датој једначини.*

Сагласно претходним дефиницијама, диференцијална једначина првог реда има општи облик

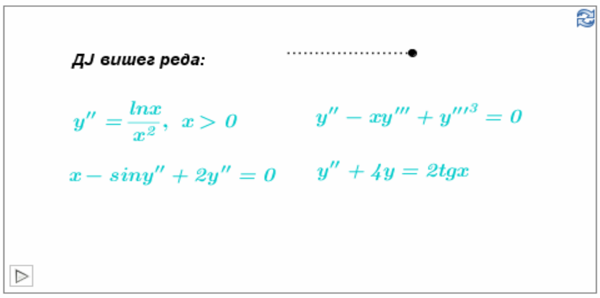
$$F(x, y, y') = 0$$

Ако се једначина $F(x, y, y') = 0$ може, на једнозначан начин, решити по y', тада добијамо **нормални облик диференцијалне једначине првог реда**

$$y' = f(x, y).$$



Слика 1.1. *Примери диференцијалних једначина првог реда*



Слика 1.2. *Примери диференцијалних једначина вишег реда*

1.2 Решавање диференцијалних једначина

Дефиниција 1.3. *Функција* $y = y(x)$ *која је непрекидна и* n *пута диференцијабилна на интервалу* (a, b) *је* **решење диференцијалне једначине** n**-тог реда** *ако за свако* $x \in (a, b)$ *важи*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Дефиниција 1.4. **Интегрална крива** *диференцијалне једначине је крива која представља графичко решење дате диференцијалне једначине.*

Дефиниција 1.5. **Опште решење** *диференцијалне једначине*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

је фамилија кривих у равни која је дефинисана једначином

$$y = \phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad \text{или} \quad \psi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

где $y = y(x)$ *идентички задовољава полазну једначину, док су* $C_1, C_2, \dots, C_n$ *произвољне константе.*

Напомена: ,,Произвољне константе” подразумевају оне вредности $C_1, C_2, \dots, C_n$ за које је функција $y = \phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ или $\psi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ дефинисана.

Дефиниција 1.6. *Свако појединачно решење диференцијалне једначине*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

које се добија из општег решења при неком конкретном избору његових константи $C_1, C_2, \dots, C_n$*, назива се* **партикуларно решење***.*

Дефиниција 1.7. *Решење* $y = \phi(x)$ *диференцијалне једначине*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

је **сингуларно решење***, ако кроз било коју његову тачку, осим њега, пролази и неко друго решење, које у тој тачки има исту тангенту као и решење* $y = \phi(x)$*, али се разликује од њега у ма којој околини тачке додира.*

Детаљније о решењима диференцијалних једначина може се видети у [4].

1.3 Кошијев проблем

Дефиниција 1.8. **Кошијев проблем (почетни проблем)** *чини диференцијална једначина*

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ \dots,\ y^{(n-1)}),$$

заједно са почетним условима

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

где су $x_0,\ y_0,\ y_1,\ \dots,\ y_{n-1}$ *дати реални бројеви.*

Почетни услови могу бити задати и у случајевима када тражено решење $y = y(x)$ није дефинисано у тачки x_0, али је дефинисано у околини тачке x_0. У оваквом случају почетне услове за диференцијалну једначину првог реда можемо записати у облику:

$$y(x) \to\ y_0, \quad \text{за} \quad x \to\ x_0.$$

Овакав услов називамо **сингуларним почетним условом**, а одговарајући Кошијев проблем

$$y' = f(x, y), \quad y(x) \to\ y_0, \quad \text{за} \quad x \to\ x_0$$

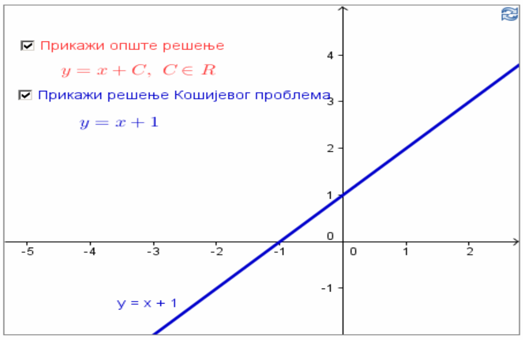
називамо **сингуларним Кошијевим проблемом** за диференцијалну једначину првог реда.

Пример 1. *Решити Кошијев проблем:*

$y' = 1, \quad y(0) = 1.$

Решење:

$y' = 1 \Leftrightarrow\ \dfrac{dy}{dx} = 1 \Leftrightarrow\ dy = dx$
Када интегралимо последњу једнакост $\int dy = \int dx$ добијамо опште решење: $y = x + C$.
Коришћењем почетног услова $y(0) = 1$ добијамо да је
$1 = 0 + C \Rightarrow\ C = 1 \Rightarrow$Решење Кошијевог проблема је функција $y = x + 1$.



Слика 1.3. *Графички приказ решења Кошијевог проблема*

1.4 Теореме о егзистенцији и јединствености решења Кошијевог проблема

Основно питање теорије диференцијалних једначина првог реда је под којим условима за функцију $f(x, y)$, дефинисану у области

$$P = \{(x, y)|(x, y) \in \mathbf{R^2},\ |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\},$$

постоји решење почетног проблема

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

У тој области важи

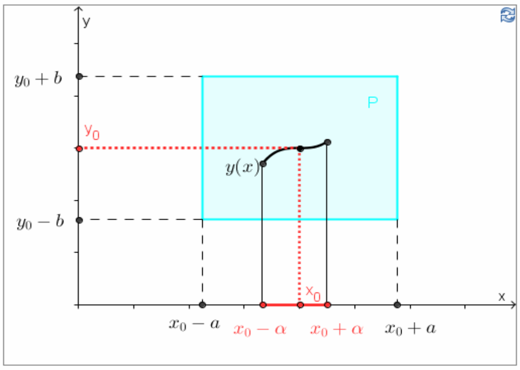
$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a,\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$$

па је P затворени правоугаоник чије је средиште тачка (x_0, y_0).
То решење је диференцијабилна функција $y = y(x)$ таква да за свако x из неког интервала $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, где је

$$\alpha = min\Big\{a, \frac{b}{M}\Big\}, \quad M = max|f(x,y)|,\ (x,y) \in P,$$

важи:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad (x, y(x)) \in P, \quad y(x_0) = y_0.$$



Слика 1.4. *Илустрација решења Кошијевог проблема на правоугаонику P*

Следеће теореме дају услове за постојање, односно јединственост решења Кошијевог проблема за диференцијалну једначину првог реда (детаљније у [6]).

Теорема 1.1. (Пеанова теорема) *Нека је дат Кошијев проблем*

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Ако је функција f непрекидна на правоугаонику

$$P = \{(x,y)|(x,y) \in \mathbf{R^2},\ |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\},$$

тада постоји бар једно решење датог Кошијевог проблема над интервалом $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ где је

$$\alpha = min\Big\{a, \frac{b}{M}\Big\}, \quad M = max|f(x,y)|,\ (x,y) \in P.$$

Теорема 1.2. (Пикарова теорема) *Нека је дат Кошијев проблем*

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Ако је функција f непрекидна на правоугаонику

$$P = \{(x,y)|(x,y) \in \mathbf{R^2},\ |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\},$$

и ако је њен први парцијални извод по y ограничен, тј. постоји $K > 0$ тако да је за свако $(x, y) \in P$

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \leq K$$

тада постоји јединствено решење датог Кошијевог проблема над интервалом $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ где је

$$\alpha = min\Big\{a, \frac{b}{M}\Big\}, \quad M = max|f(x,y)|,\ (x,y) \in P.$$

Поред Пикарове теореме постоји и општија теорема о јединствености решења Кошијевог проблема. За њену формулацију потребно је прво да дефинишемо **Липшицов услов** за функцију дефинисану на правоугаонику.

Дефиниција 1.9. *За функцију две промењиве $f : P \longrightarrow \mathbf{R}$, где је P правоугаоник дат са*

$$P = \{(x,y)|(x,y) \in \mathbf{R^2},\ |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\},$$

кажемо да задовољава **Липшицов услов на правоугаонику** *P по промењивој y ако постоји број L тако да за сваке две тачке (x, y_1) и (x, y_2) из P важи*

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq L \cdot |y_2 - y_1|.$$

На основу Лагранжове теореме о средњој вредности следи да ако функција f има ограничен први парцијални извод по y на P, тада она задовољава Липшицов услов на P по промењивој y, па важи следећа општија теорема.

Теорема 1.3. *Нека је дат Кошијев проблем*

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Ако је функција f непрекидна на правоугаонику

$$P = \{(x,y)|(x,y) \in \mathbf{R^2},\ |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\},$$

и ако f задовољава Липшицов услов на P по промењивој y, тада постоји јединствено решење датог Кошијевог проблема над интервалом $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ где је

$$\alpha = min\Big\{a, \frac{b}{M}\Big\}, \quad M = max|f(x,y)|,\ (x,y) \in P.$$

1.5 Геометријска интерпретација решења

У овом делу ћемо видети како се решења диференцијалних једначина могу геометријски интерпретирати и како геометријски можемо формулисати Кошијев проблем.

Дефиниција 1.10. *Нека је функција* $f(x, y)$ *дефинисана и непрекидна у области* $G = \{(x, y)|\ x \in [a, b],\ \ y \in [\alpha, \beta]\}$ *и нека је* $y = \varphi(x)$ *решење једначине*

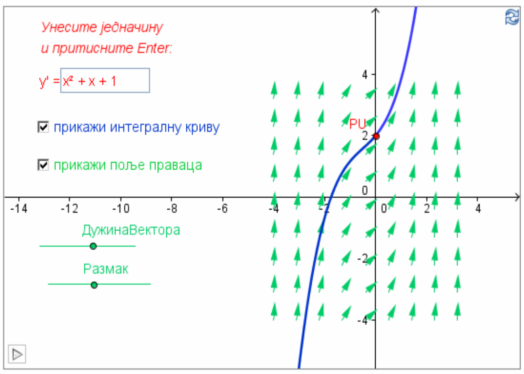
$$y' = f(x, y)$$

у неком интервалу (a, b) *. Уређена тројка* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$*, где је* $f(x_0, y_0)$*, у ма којој тачки* (x_0, y_0) *одређено са* $y'(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$ *назива се* **линијски елемент***, а скуп свих линијских елемената је* **поље праваца** *дате једначине.*

Геометријско тумачење диференцијалне једначине $y' = f(x, y)$ говори да тангента графика решења $y = \varphi(x)$ у ма којој његовој тачки (x_0, y_0) има коефицијент правца $f(x_0, y_0)$.
За решење са овом особином кажемо да је сагласно са пољем праваца одређених једначином $y' = f(x, y)$.
Скуп свих кривих сагласних са пољем праваца је **опште решење** дате једначине.
Решење које пролази кроз тачку (x_0, y_0) је њено **партикуларно решење**.

Кошијев проблем $y' = f(x, y),\ \ y(x_0) = y_0$ геометријски можемо формулисати као захтев да се одреди интегрална крива једначине $y' = f(x, y)$ која пролази задатом тачком (x_0, y_0).

Дакле, решити диференцијалну једначину првог реда са геометријског становишта значи наћи све криве чији су графици сагласни са пољем праваца. Детаљније видети у [7].



Слика 1.5. *Аплет који црта интегралну криву и поље праваца за једначину коју је задао корисник*

2 Диференцијалне једначине I реда

2.1 Диференцијална једначина која раздваја променљиве

Дефиниција 2.1. *Диференцијална једначина првог реда која* **раздваја променљиве** *је једначина облика*

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

где су функције f и g непрекидне функције респективно од x и од y на датим интервалима $[a, b]$ и $[c, d]$.

Ако је $g(y) \neq 0$, тада претходну једначину можемо записати у облику

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

односно после интеграције као

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Ако је за неко $y_0 \in [c, d]$ задовољено $g(y_0) = 0$, тада се лако проверава да је права $y = y_0$ решење диференцијалне једначине $y' = f(x)g(y)$.

Једначина облика

$$F(x)G(y)dx + f(x)g(y)dy = 0,$$

где су $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ и $\dfrac{g(y)}{G(y)}$ непрекидне функције једне променљиве, је такође диференцијална једначина која раздваја променљиве.
Решење ове једначине се добија из релације

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}dx = -\int \frac{g(y)}{G(y)}dy$$

након интеграције.
Ако су a и b решења једначина $f(x) = 0$ и $G(y) = 0$ респективно, тада су и $x = a$ и $y = b$ решења једначине $F(x)G(y)dx + f(x)g(y)dy = 0$.

Једначина облика

$$y' = f(ax + by + c), \quad a, b, c = const.$$

где је f непрекидна на интервалу (a, b) такође се може свести на диференцијалну једначину која раздваја променљиве.
Ако уведемо смену: $z = ax+by+c$, где је $z = z(x)$, тада је полазна једначина облика $y' = f(z)$.
Израчунајмо извод функције z по x: $z' = a+by'$. Када заменимо у последњу једнакост y' са $f(z)$ добијамо једначину

$$z' = a + bf(z)$$

која представља специјалан случај диференцијалне једначине која раздваја променљиве

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx.$$

Када решимо ову диференцијалну једначину и када у том решењу уместо z вратимо $ax + by + c$, добићемо решење полазне једначине.

Пример 2. *Решити диференцијалну једначину:* $y' = \dfrac{y^2}{x^3}, \quad x \neq 0$

Решење:
Дата диференцијална једначина је једначина која раздваја променљиве и за $y \neq 0$ може се записати у облику

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^3} \quad \Big/ \int$$

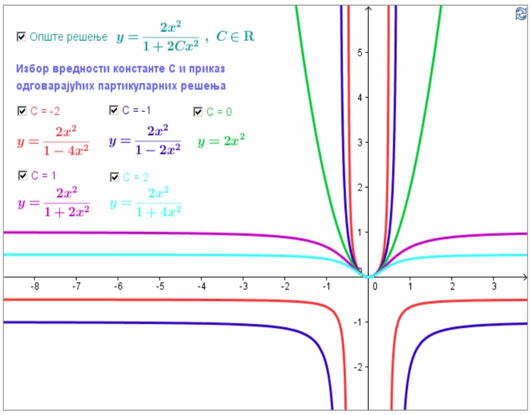
Након интеграције добијамо

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{2x^2} + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{2x^2} + C, \quad (C = -C_1)$$

односно опште решење дате једначине је

$$y = \frac{2x^2}{1 + 2Cx^2}\ , \quad C \in \mathbf{R}$$

Ако је $y = 0$ тада је $y' = 0$, па је и права $y = 0$ решење дате једначине.



Слика 2.1. *Графички приказ партикуларних решења за изабране вредности константе C*

Пример 3. *Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине:* $(xy^2 - x)dx + (x^2y - y)dy = 0$, *које задовољава почетни услов* $y(0) = 2$.

Решење:
Дата једначина се може записати у облику

$$x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ydy}{y^2 - 1} = -\frac{xdx}{x^2 - 1}$$

и добили смо диференцијалну једначину која раздваја променљиве. Тада је

$$\int \frac{ydy}{(y-1)(y+1)} = \int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)}.$$

Интеграцијом рационалних функција добијамо

$$\frac{1}{2}ln|y^2-1| = -\frac{1}{2}ln|x^2-1| + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad ln|y^2-1| = -ln|x^2-1| + lnC,$$

где је $C = e^{2C_1}$ нова константа.Сада је

$$ln|y^2-1| = ln\left|\frac{1}{x^2-1}\right| + lnC \ \Big/ e$$

$$\Rightarrow y^2 - 1 = C \cdot \frac{1}{x^2-1},$$

па је опште решење полазне диференцијалне једначине облика

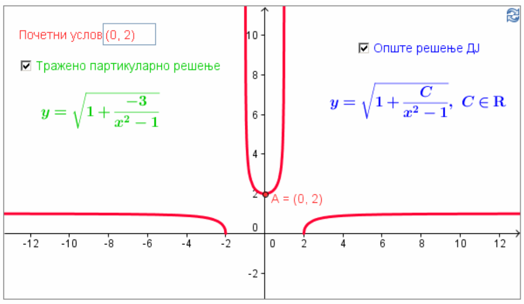
$$y = \sqrt{1 + \frac{C}{x^2-1}}, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Потребно је одредити партикуларно решење које задовољава почетни услов $y(0) = 2$. Коришћењем датог услова добијамо да је

$$2 = \sqrt{1 + \frac{C}{-1}} \quad \Leftrightarrow 2 = \sqrt{1-C} \quad \Rightarrow C = -3.$$

Дакле, тражено партикуларно решење је

$$y = \sqrt{1 - \frac{3}{x^2-1}}$$



Слика 2.2. *Графички приказ партикуларног решења за почетни услов који корисник задаје*

Примери су засновани на [1] и [3], где се може наћи још сличних примера.

2.2 Хомогена диференцијална једначина

Дефиниција 2.2. *Непрекидна реална функција h две реалне променљиве x и y је* **хомогена функција степена** *n на домену D ако за све $(x,y) \in D$ важи*

$$(\forall \lambda > 0) \quad h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n h(x,y).$$

Дефиниција 2.3. *Диференцијална једначина*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

је **хомогена диференцијална једначина** *на домену D ако су функције $P = P(x,y)$ и $Q = Q(x,y)$ хомогене функције истог степена на D.*

Теорема 2.1. *Једначина*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

се може свести на облик

$$y' = f\Big(\frac{y}{x}\Big),$$

где је f позната непрекидна функција на неком интервалу (a,b). Ова једначина такође представља хомогену диференцијалну једначину првог реда.

Доказ:
Према дефиницији хомогености је $P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n P(x,y)$ и $Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n Q(x,y)$.
Нека је $\lambda = \frac{1}{x}$. Тада је

$$P\Big(1, \frac{y}{x}\Big) = \Big(\frac{1}{x}\Big)^n P(x,y) \Rightarrow P(x,y) = x^n P\Big(1, \frac{y}{x}\Big)$$

$$Q\Big(1, \frac{y}{x}\Big) = \Big(\frac{1}{x}\Big)^n Q(x,y) \Rightarrow Q(x,y) = x^n Q\Big(1, \frac{y}{x}\Big).$$

Заменом добијених израза за функције $P = P(x,y)$ и $Q = Q(x,y)$ у једначину

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

добијамо следећу једначину

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = -\frac{x^n P\Big(1, \frac{y}{x}\Big)}{x^n Q\Big(1, \frac{y}{x}\Big)} = -\frac{P\Big(1, \frac{y}{x}\Big)}{Q\Big(1, \frac{y}{x}\Big)} = f\Big(\frac{y}{x}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad y' = f\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

$\square$

Одредимо сада решење хомогене диференцијалне једначине првог реда

$$y' = f\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Увешћемо нову функцију $u = u(x)$ на следећи начин:

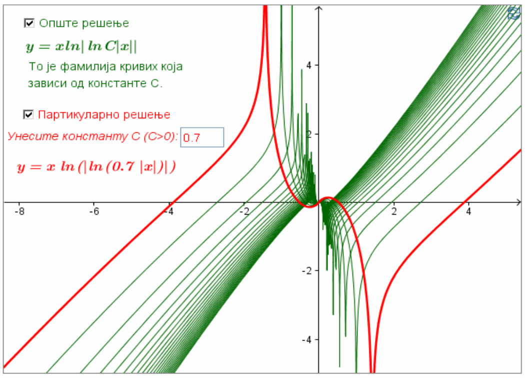
$$u = u(x) = \frac{y(x)}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = x \cdot u(x).$$

Тада је
$$y'(x) = u(x) + xu'(x).$$
Заменом $y'(x) = u(x) + xu'(x)$ у $y' = f\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$ добијамо једначину
$$u + xu' = f\Big(\frac{xu}{x}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad u + x\frac{du}{dx} = f(u)$$
која раздваја променљиве.

1. Ако је на интервалу (a,b), $f(u) - u \neq 0$, тада је
$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u},$$
па се решење једначине може написати у облику
$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{f(u) - u} \quad \Rightarrow \quad ln|x| = \int \frac{du}{f(u) - u} + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad x = Ce^{\int \frac{du}{f(u)-u}}.$$
После интеграције, потребно је функцију u заменити са $\frac{y}{x}$.
2. Ако за неко $u_0 \in (a,b)$ важи $f(u) - u = 0$, тада је $y(x) = u_0x + C$ решење једначине $y' = f\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$.
3. Ако је $f(u) - u \equiv 0$, тада се једначина $y' = f(\frac{y}{x})$ своди на једначину $y' = \frac{y}{x}$ која раздваја променљиве.

Пример 4. *Решити диференцијалну једначину:* $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$.

Решење:
Дата једначина је хомогена диференцијална једначина, па уводимо смену
$$u = \frac{y}{x} \ \Rightarrow \ y = xu.$$
Када диференцирамо по x имаћемо $y' = u + xu'$. Тада је
$$u + xu' = e^{-u} + u \ \Leftrightarrow \ x\frac{du}{dx} = \frac{1}{e^u} \ \Leftrightarrow \ e^u du = \frac{dx}{x} \ \Big/ \int$$
Добили смо диференцијалну једначину која раздваја променљиве, па је након интеграције
$$e^u = \ln|x| + C_1 \ ,$$
Када вратимо смену $u = \frac{y}{x}$ и ако је $C = e^{C_1}$ добијамо
$$e^{\frac{y}{x}} = \ln|x| + \ln C \ \Leftrightarrow \ e^{\frac{y}{x}} = \ln C|x| \ \Big/ \ln$$
$$\frac{y}{x} = \ln|\ln C|x|| \ ,$$
па је опште решење полазне једначине
$$y = x\ln|\ln C|x||, \ C > 0.$$



Слика 2.3. *Графички приказ оптшег и партикуларног решења за вредност C коју корисник задаје*

2.3 Диференцијална једначина која се своди на хомогену

Нека је дата диференцијална једначина

$$y' = f\left(\frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}\right),$$

где је f непрекидна функција на интервалу (a, b) и нека је

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1.$$

У зависности од вредности Δ разликујемо два случаја:

1. Ако је $\Delta \neq 0$ тада уводимо смене

$$x = u + h, \quad y = v + k,$$

где је u нова независно променљива, $v = v(u)$ нова зависно променљива, а h и k које ћемо одредити тако да се једначина $y' = f\left(\frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}\right)$ трансформише у хомогену једначину. Како је

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{d(v+k)}{dx} = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dv}{du} = v'_u$$

то је

$$v' = v'_u = f\left(\frac{A_1u + B_1v + A_1h + B_1k + C_1}{A_2u + B_2v + A_2h + B_2k + C_2}\right)$$

Претходна једначина ће бити хомогена ако h и k задовољавају систем једначина

$$A_1h + B_1k + C_1 = 0, \quad A_2h + B_2k + C_2 = 0.$$

На основу услова $\Delta \neq 0$ следи да овај систем има јединствено решење по h и k. Нека је

$$h = h_1 \quad \text{и} \quad k = k_1$$

решење овог система. Заменом ових решења у једначину

$$v' = f\left(\frac{A_1u + B_1v + A_1h + B_1k + C_1}{A_2u + B_2v + A_2h + B_2k + C_2}\right)$$

добијамо хомогену диференцијалну једначину по функцији $v = v(u)$

$$v' = f\left(\frac{A_1u + B_1v}{A_2u + B_2v}\right) \equiv f_1\left(\frac{v}{u}\right).$$

Ако је $v = v(u, C)$ решење ове хомогене диференцијалне једначине, тада је $y = k_1 + v(x - h_1, C)$ решење једначине $y' = f\left(\dfrac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}\right)$.

2. Ако је $\Delta = 0$, тада постоји k такво да је $A_1 = kA_2$ и $B_1 = kB_2$, па једначину $y' = f\left(\dfrac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}\right)$ можемо написати у облику

$$y' = f\left(\frac{kA_2x + kB_2y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}\right) = f\left(\frac{k(A_2x + B_2y) + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}\right)$$

Сменом

$$z = z(x) = A_2x + B_2y(x)$$

добијамо да је

$$y' = f\left(\frac{kz + C_1}{z + C_2}\right).$$

и када то заменимо у једнакост

$$z' = A_2 + B_2y'$$

добијамо диференцијалну једначину по непознатој функцији z која раздваја промењливе

$$z' = A_2 + B_2f\left(\frac{kz + C_1}{z + C_2}\right).$$

Када решимо ову једначину по z и вратимо смену, добићемо решење полазне једначине.

Пример 5. *Решити диференцијалну једначину:* $y' = \dfrac{4x - y - 1}{y - x - 2}$

Решење:

Како је $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ може се увести смена

$$x = u + h, \ y = v + k$$

где су h и k константе које ћемо касније одредити, а $v = v(u)$ нова непозната функције независно промењливе u.Тако добијамо једначину

$$v' = \frac{4u - v + 4h - k - 1}{v - u + k - h - 2}$$

која ће се свести на хомогену диференцијалну једначину ако важи

$$4h - k - 1 = 0$$

$$k - h - 2 = 0$$

Решавањем овог система добијамо да је $h = 1$, а $k = 3$, па следи да је $x = u+1$, $y = v+3$. Замењујући добијене вредности за h и k дату једначину сводимо на хомогену

$$v' = \frac{4u - v}{v - u} \quad \Leftrightarrow \quad v' = \frac{4 - \frac{v}{u}}{\frac{v}{u} - 1}$$

Она се решава сменом

$$\frac{v}{u} = t \quad \Rightarrow \quad v = tu$$

где је $t = t(u)$ непозната функција промењливе u. Диференцирањем по u добијамо

$$v' = t'u + t \quad \Rightarrow ut' + t = \frac{4 - t}{t - 1}.$$

Када мало средимо претходни израз добићемо

$$u\frac{dt}{du} = \frac{4 - t}{t - 1} - t \ \Leftrightarrow \ \frac{t - 1}{4 - t^2}dt = \frac{du}{u} \quad \Big/ \int$$

Сада имамо диференцијалну једначину која раздваја промењливе и после интеграције рационалне функције добијамо

$$-\frac{1}{2}\ln|4 - t^2| - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2 + t}{2 - t}\right| = \ln|u| + \ln C.$$

Сређивањем последњег израз добијамо

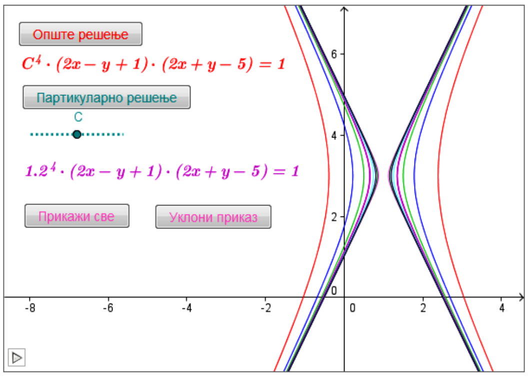
$$(2 - t)(2 + t)^3 = \frac{1}{C^4u^4}.$$

Сада кад вратимо смену $t = \frac{v}{u}$ добијамо

$$C^4(2u - v)(2u + v)^3 = 1.$$

На крају, када вратимо полазну смену $u = x - 1,\ v = y - 3$ добијамо опште решење дате диференцијалне једначине

$$C^4(2x - y + 1)(2x + y - 5) = 1, \quad C > 0\ .$$



Слика 2.4. *Графички приказ неких партикуларних решења*

2.4 Линеарна диференцијална једначина

Дефиниција 2.4. Линеарна диференцијална једначина првог реда *је једначина облика*

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

где су P и Q дате непрекидне функције независне променљиве x.

Опште решење линеарне диференцијалне једначине потражићемо у облику производа

$$y = u(x)v(x),$$

где су u и v засад неодређене функције. Тада је

$$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

па се полазна једначина може записати у облику

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + P(x)u(x)v(x) = Q(x),$$

односно,

$$\Big(u'(x) + P(x)u(x)\Big)v(x) + v'(x)u(x) = Q(x).$$

Функцију $u(x)$ можемо одредити тако да важи

$$u'(x) + P(x)u(x) = 0,$$

односно, функцију $u(x)$ можемо добити решавањем ове једначине:

$$\frac{du}{dx} + P(x)u(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -P(x)dx,$$

Интеграљењем последње једнакости добијамо:

$$lnu = -\int P(x)dx \quad \Rightarrow \quad u = C_1 \cdot e^{(-\int P(x)dx)}$$

Ако узмемо да је $C_1 = 1$, тада имамо да је

$$u = e^{(-\int P(x)dx)}.$$

Заменом функције $u(x)$ у једначину

$$\underbrace{\Big(u'(x)+P(x)u(x)\Big)}_{0}v(x)+v'(x)u(x)=Q(x)$$

добијамо

$$v'(x)e^{(-\int P(x)dx)}=Q(x) \quad \Rightarrow \quad v'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

одакле, после интеграције, следи

$$v(x)=C+\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx,$$

где је C произвољна константа.

Када смо одредили функције $u(x)$ и $v(x)$, добили смо и *опште решење* полазне линеарне диференцијалне једначине:

$$y=e^{(-\int P(x)dx)}\cdot\left(C+\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right), \quad C\in\mathbf{R}.$$

Пример 6. *Одредити решење диференцијалне једначине* $y'+2xy=2xe^{-x^2}$.

Решење:
Како је дата једначина линеарна, где је

$$P(x)=2x, \quad Q(x)=2xe^{-x^2}\ ,$$

њено решење можемо добити директном применом формуле за опште решење

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(C+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right).$$

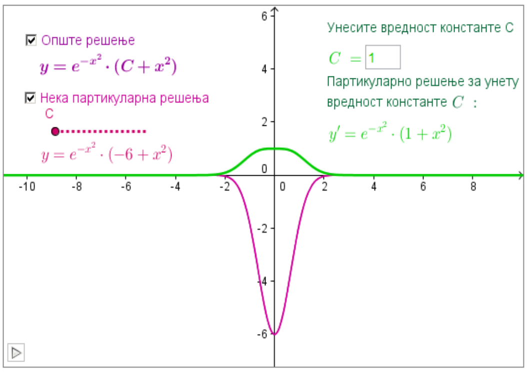
Нека је

$$I_1=\int P(x)dx=\int 2xdx=x^2$$

$$I_2=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int 2xe^{-x^2}e^{x^2}dx=\int 2xdx=x^2\ ,$$

па је опште решење облика

$$y(x)=e^{-I_1}(C_1+I_2) \quad \Leftrightarrow \quad y(x)=e^{-x^2}(C+x^2)\ ,\ C\in\mathbf{R}.$$



Слика 2.5. *Графички приказ партикуларних решења за изабране вредности константе C*

Пример 7. *Решити диференцијалну једначину $dy = y \; ctg \; x \; dx - \dfrac{dx}{\sin x}$ и одредити партикуларно решење које задовољава услов $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.*

Решење:
Полазну једначину можемо записати у облику

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot ctg \; x - \frac{1}{\sin x}$$

и сада смо добили линеарну диференцијалну једначину по $y = y(x)$. Њено решење ћемо тражити у облику производа

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

где су $u = u(x)$ и $v = v(x)$ за сада непознате функције које треба да одредимо. Диференцирањем последње једнакости по x добијамо $y' = u'v + uv'$, па када заменимо у једначину

$$y' - ctg \; x \cdot y = -\frac{1}{\sin x}$$

имаћемо да је

$$(u' - u \cdot ctg \; x)v + uv' = -\frac{1}{\sin x}.$$

Бирамо функцију $u = u(x)$ тако да је

$$u' - u \cdot ctg \; x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dx} = u \cdot ctg \; x \; ,$$

односно,

$$\frac{du}{u} = ctg \; xdx \; \Big/ \int$$

$$\int \frac{du}{u} = \int ctg \; xdx$$

Након интеграције добијамо да је

$$u(x) = \sin x.$$

Када смо одредили u, из $(u' - u \cdot ctg\ x)v + uv' = -\frac{1}{\sin x}$ следи да је

$$uv' = -\frac{1}{\sin x} \quad \Leftrightarrow \quad v' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \Rightarrow \int dv = \int -\frac{1}{\sin^2 x} dx$$

Након интеграције добијамо да је

$$v(x) = ctg\ x + C$$

Сада је опште решење полазне једначине

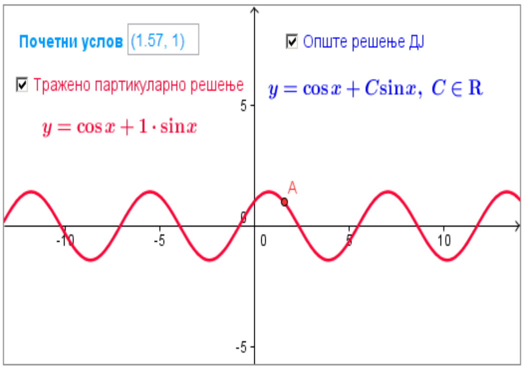
$$y = \sin x(ctg\ x + C) \quad \Leftrightarrow \quad y = \cos x + C \sin x.$$

Коришћењем почетног услова $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ добијамо

$$1 = \cos\frac{\pi}{2} + C\sin\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

Дакле, тражено партикуларно решење је

$$y = \cos x + \sin x.$$



Слика 2.6. *Графички приказ партикуларног решења које задовољава почетни услов који је корисник задао*

Примери су засновани на [1] и [3], где се може наћи још сличних примера.

2.5 Бернулијева диференцијална једначина

Дефиниција 2.5. Бернулијева[1] диференцијална једначина *је једначина првог реда облика*

$$y' + P(x)y = Q(x)y^k$$

где су $P(x)$ *и* $Q(x)$ *дате непрекидне функције, а* k *реалан параметар различит од* 0 *и* 1.

[1] Daniel Bernoulli (1700-1782), швајцарски лекар, физичар и математичар

Ако је $k = 0$, тада Бернулијева једначина постаје линеарна диференцијална једначина првог реда, а ако је $k = 1$, онда је у питању диференцијална једначина која раздваја променљиве.

Постоје две методе за решавање Бернулијеве диференцијалне једначине. Као и линеарна диференцијална једначина првог реда, и Бернулијева једначина се може решавати сменом

$$y = u(x)v(x).$$

Друга метода решавања је коришћењем смене

$$z = z(x) = y^{1-k}(x).$$

У том случају је $z' = (1-k)y^{-k}y'$ одакле следи

$$y' = \frac{y^k}{1-k}z'.$$

Ако полазну једначину поделимо са y^k и уведемо дату смену, добијамо

$$y' + P(x)y = Q(x)y^k \quad / : y^k$$

$$\frac{y'}{y^k} + P(x)y^{1-k} = Q(x)$$

$$\frac{z'}{1-k} + P(x)z = Q(x) / \cdot (1-k)$$

$$z' + (1-k)P(x)z = (1-k)Q(x),$$

а то је линеарна диференцијална једначина првог реда по функцији $z = z(x)$.

Пример 8. *Решити диференцијалну једначину:* $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2, \quad x \neq 0.$

Решење:
Ово је Бернулијева диференцијална једначина за $k = 2$, па ћемо увести смену

$$z = z(x) = y^{1-k}(x) = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{z}$$

Када диференцирамо последњу једнакост по x добићемо

$$y' = -\frac{z'}{z^2}$$

Заменом у полазну једначину добијамо

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{zx} = -\frac{x}{z^2} \quad \Big/ \cdot (-z^2)$$

$$z' - \frac{1}{x} \cdot z = x.$$

Ово је линеарна диференцијална једначина по $z = z(x)$, где је

$$P(x) = -\frac{1}{x}, \quad Q(x) = x$$

Нека је

$$I_1 = \int P(x)dx = -\int \frac{dx}{x} = -ln|x|.$$

Разликујемо два случаја:

1) Ако је $x > 0$ тада је

$$I_1 = -lnx$$

$$I_2 = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int xe^{-lnx}dx = \int dx = x$$

па је опште решење линеарне диференцијалне једначине облика

$$z(x) = e^{-I_1}(C_1 + I_2) \quad \Leftrightarrow \quad z(x) = e^{lnx}(C_1 + x),$$

односно, када вратимо смену $z = \frac{1}{y}$, добијамо

$$\frac{1}{y} = x(C_1 + x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{x(C_1 + x)}$$

2) Ако је $x < 0$ тада је

$$I_1 = -ln(-x)$$

$$I_2 = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int xe^{-ln(-x)}dx = -\int dx = -x$$

па је опште решење облика

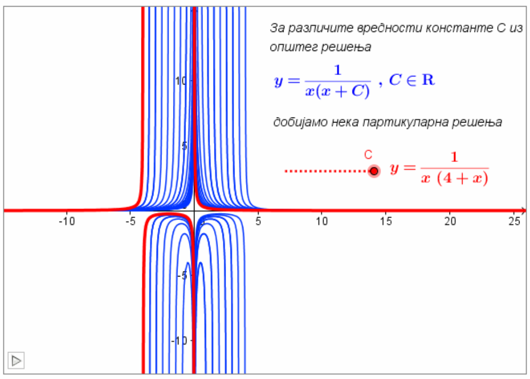
$$z(x) = e^{-I_1}(C_1 + I_2) \quad \Leftrightarrow \quad z(x) = e^{ln(-x)}(C_1 - x),$$

односно, када вратимо смену $z = \frac{1}{y}$, добијамо

$$\frac{1}{y} = -x(C_1 - x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{x(-C_1 + x)}$$

Ако уведемо нову константу $C = \pm C_1$ тада је опште решење полазне једначине

$$y = \frac{1}{x(C + x)}, \ C \in \mathbf{R}.$$



Слика 2.7. *Графички приказ решења Бернулијеве једначине*

2.6 Једначина тоталног диференцијала

Дефиниција 2.6. *Диференцијална једначина*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

назива се **једначина тоталног диференцијала** *на домену* $D \subset \mathbf{R^2}$ *ако је на* D *испуњен следећи услов*

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y).$$

Ако су функције P и Q непрекидне и имају непрекидне прве парцијалне изводе на отвореном правоугаонику D, и ако на D важи $\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$, тада постоји функција $U = U(x,y)$ за коју је

$$dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Из $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ следи да је $dU(x,y) = 0$, па је опште решење полазне једначине тоталног диференцијала облика

$$U(x,y) = C,$$

где је C произвољна константа.

Сада је потребно одредити функцију $U = U(x,y)$.
Полазећи од релације

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

закључујемо да важе следеће једнакости

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$$

Интегралимо прву једнакост

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \Big/ \int dx$$

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y)$$

Сада је

$$Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int P(x,y)dx + \varphi(y) \Big)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int P(x,y)dx \Big) \quad \Big/ \int dy$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = \int \Big[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x,y)dx \Big] dy$$

На овај начин смо одредили функцију $U = U(x,y)$

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx + \int \Big[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x,y)dx \Big] dy$$

Сада из једнакости $U(x,y)=C$ добијамо опште решење једначине тоталног диференцијала

$$\int P(x,y)dx + \int \left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right]dy = C.$$

Пример 9. *Одредити решење диференцијалне једначине:*
$(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0.$

Решење:
Како је

$$\frac{\partial(\cos y + y\cos x)}{\partial y} = -\sin y + \cos x = \frac{\partial(\sin x - x\sin y)}{\partial x},$$

ово ће бити једначина тоталног диференцијала, па постоји функција $U = U(x,y)$ тако да је

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \cos y + y\cos x \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \sin x - x\sin y.$$

Тада је

$$U(x,y) = \int (\cos y + y\cos x)dx = x\cos y + y\sin x + \phi(y)\ ,$$

где функцију ϕ треба одредити. Из једнакости $\frac{\partial U}{\partial y} = \sin x - x\sin y$ добијамо

$$\frac{\partial}{\partial y}(x\cos y + y\sin x + \phi(y)) = \sin x - x\sin y$$

$$\Leftrightarrow \quad -x\sin y + \sin x + \phi'(y) = \sin x - x\sin y$$

$$\Rightarrow \quad \phi'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = C_1\ ,\ C_1 \in \mathbf{R}.$$

Нека је $C = -C_1$, тада је опште решење

$$x\cos y + y\sin x = C\ .$$

2.7 Интеграциони фактор

Опште решење диференцијалне једначине са тоталним диференцијалом се увек може одредити. Зато се јавља идеја трансформације било које диференцијалне једначине првог реда у диференцијалну једначину са тоталним диференцијалом.
Нека је дата једначина

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

где су функције P и Q непрекидне и имају непрекидне прве парцијалне изводе на отвореном правоугаонику D, и ако на D важи

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) \neq \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y),$$

тада ова једначина није једначина тоталног диференцијала.

Понекад је могуће одредити функцију $M = M(x,y)$ која је дефинисана и непрекидна заједно са својим парцијалним изводима првог реда на D тако да

$$M(x,y)P(x,y)dx + M(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

буде диференцијална једначина тоталног диференцијала.

Функцију $M(x,y)$ зовемо *интеграциони фактор* полазне једначине. Налажење интеграционог фактора у општем случају може бити јако компликовано, али у појединим случајевима он се може лако одредити (видети у [2]).

1. Ако израз
$$F(x) = \frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)$$
зависи само од променљиве x, тада интеграциони фактор одређујемо по формули
$$M(x) = e^{\int F(x)dx}.$$

2. Ако израз
$$G(t) = \frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)$$
зависи само од променљиве y, тада интеграциони фактор одређујемо по формули
$$M(y) = e^{-\int G(y)dy}.$$

3. Ако једначина
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$
није једначина тоталног диференцијала, али је хомогена и важи
$$xP(x,y) + yQ(x,y) \neq 0,$$
тада је интеграциони фактор $M = M(x,y)$ одређен формулом
$$M(x,y) = \frac{1}{xP(x,y) + yQ(x,y)}.$$

4. Ако једначина
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$
није једначина тоталног диференцијала, али се може записати у облику
$$yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0,$$

где је $f(t) \neq g(t)$ (за све t из неког интервала(a, b)), тада је интеграциони фактор $M = M(x, y)$ одређен формулом

$$M(x,y) = \frac{1}{xy(f(xy) - g(xy))} = \frac{1}{xP(x,y) - yQ(x,y)}.$$

Када одредимо интеграциони фактор тада можемо наћи опште решење диференцијалне једначине

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

на следећи начин:

$$dU(x,y) = M(x,y)(P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$$

$$\Rightarrow \frac{dU(x,y)}{M(x,y)} = 0$$

$$\Rightarrow dU(x,y) = 0 \Rightarrow U(x,y) = C,$$

где је C произвољна константа.

Сингуларна решења тражимо у облику

$$\frac{1}{M(x,y)} = 0.$$

Пример 10. *Наћи опште решење диференцијалне једначине:*
$(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0.$

Решење:
Посматрајмо парцијалне изводе израза на левој страни дате једначине

$$\frac{\partial(x^2 + y^2 + x)}{\partial y} = 2y \ , \quad \frac{\partial(xy)}{\partial x} = y.$$

Како је

$$\frac{\partial(x^2 + y^2 + x)}{\partial y} \neq \frac{\partial(xy)}{\partial x},$$

полазна једначина није једначина тоталног диференцијала и онда посматрамо израз

$$\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}, \ x \neq 0,$$

који зависи само од променљиве x, па је интеграциони фактор функција променљиве x, тј. $M = M(x)$ (случај 1.)

$$M(x) = e^{\int \frac{dx}{x}}$$

$$M(x) = e^{\ln|x|}$$

$$M(x) = |x| = \pm\, x$$

За интеграциони фактор бирамо било које решење, па ћемо узети да је

$$M(x) = x.$$

После множења полазне једначине са интеграционим фактором x добијамо

$$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2ydy = 0$$

и то је једначина тоталног диференцијала јер је

$$\frac{\partial(x^3 + xy^2 + x^2)}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial(x^2y)}{\partial x}$$

Дакле, постоји функција $U = U(x, y)$ таква да је

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x^3 + xy^2 + x^2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x^2y$$

Тада је

$$U(x, y) = \int (x^3 + xy^2 + x^2)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \phi(y).$$

Из следећих релација

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2y$$

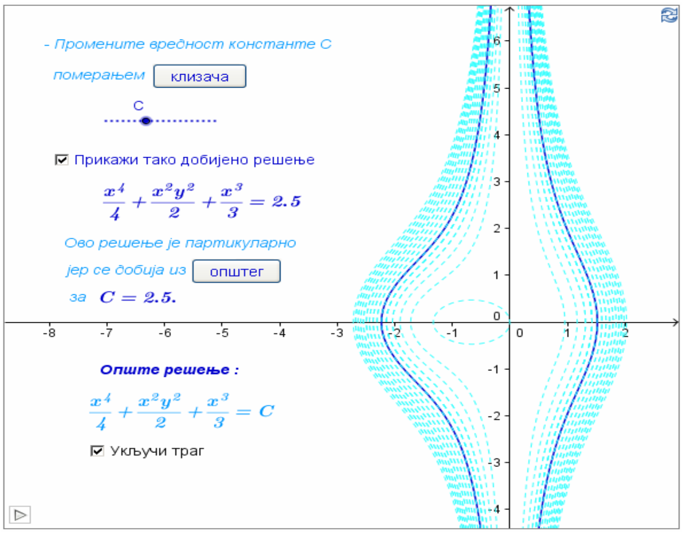
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \phi(y)\right)}{\partial y} = x^2y + \phi'(y)$$

када их изједначимо, добијамо да је

$$x^2y + \phi'(y) = x^2y \quad \Rightarrow \quad \phi'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = C,$$

па је опште решење полазне диференцијалне једначине

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} = C \quad C \in \mathbf{R}.$$



Слика 2.8. *Графички приказ партикуларних решења за изабране вредности константе C*

2.8 Једначине првог реда вишег степена

Дефиниција 2.7. *Посматрајмо посебан облик диференцијалне једначине првог реда*

$$(y')^n + f_{n-1}(x,y)(y')^{n-1} + \ \ldots \ + f_1(x,y)y' + f_0(x,y) = 0,$$

где су $f_j,\ j = 0,1,\ldots,n-1$ дате функције. Ова једначина се тада зове **диференцијална једначина првог реда степена** $n,\ n \neq 1.$

Претпоставимо да се лева страна једначине може разложити на факторе

$$\big(y' - \varphi_1(x,y)\big) \cdot \big(y' - \varphi_2(x,y)\big) \cdot \ \ldots \ \cdot \big(y' - \varphi_n(x,y)\big) = 0,$$

где су $\varphi_j,\ j = 1,\ldots,n$ познате функције.
Тада је једначина

$$(y')^n + f_{n-1}(x,y)(y')^{n-1} + \ \ldots \ + f_1(x,y)y' + f_0(x,y) = 0$$

еквивалентна са дисјункцијом n једначина

$$y' = \varphi_1(x,y) \quad \bigvee \quad y' = \varphi_2(x,y) \quad \bigvee \quad \ldots \quad \bigvee \quad y' = \varphi_n(x,y).$$

Ако означимо опште решење j-те једначине са $\psi_j(x,y,C) = 0$ тада се опште решење полазне једначине

$$(y')^n + f_{n-1}(x,y)(y')^{n-1} + \ \ldots \ + f_1(x,y)y' + f_0(x,y) = 0$$

може написати у облику производа

$$\psi_1(x,y,C) \cdot \psi_2(x,y,C) \cdot \ \ldots \ \cdot \psi_n(x,y,C) = 0.$$

Пример 11. *Решити диференцијалну једначину:* $y(y')^2 + (x - y)y' - x = 0$

Решење:
Дата једначина је квадратна једначина по y', па је

$$y'_{1,2} = \frac{y - x \pm \sqrt{(x-y)^2 + 4xy}}{2y} = \frac{y - x \pm (x+y)}{2y}$$

$$\Rightarrow y'_1 = 1, \quad y'_2 = -\frac{x}{y}$$

Сада полазну једначину можемо записати у облику

$$(y' - 1)(y' + \frac{x}{y}) = 0$$

Решићемо најпре прву једначину $y' = 1 \quad \Rightarrow \quad dy = dx \quad \Rightarrow \quad y = x + C$.
Другу једначину можемо записати у облику

$$y' = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad ydy = -xdx$$

и то је диференцијална једначина која раздваја променљиве, па ће бити

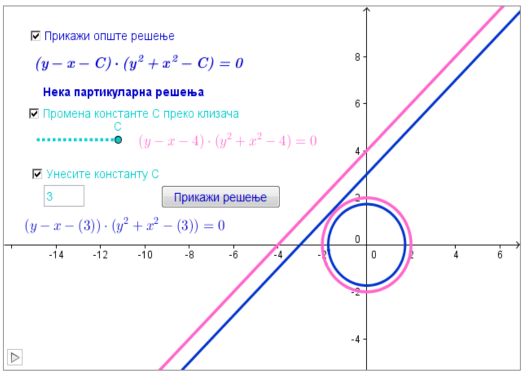
$$\int ydy = -\int xdx$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 + x^2 = C$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 + x^2 - C = 0.$$

Опште решење полазне диференцијалне једначине је облика

$$(y - x - C) \cdot (y^2 + x^2 - C) = 0.$$



Слика 2.9. *Графички приказ партикуларних решења за изабрану вредност константе C*

2.9 Једначине које се решавају параметризацијом

2.9.1 Увођење параметара

Поступак решавања диференцијалне једначине $F(x,y,y')=0$ је релативно једноставан када се она може експлицитно решити по y'. Када то није могуће приступа се параметризацији. Посматраћемо неколико посебних случајева диференцијалне једначине првог реда $F(x,y,y')=0$ која се решава увођењем параметара.

1. Нека је једначина $F(x,y,y')=0$ облика
$$F(x,y')=0,$$
и нека се може записати као $x=\varphi(y')$. Ако уведемо параметар $y'=p$ тада је $dy=pdx$ и
$$x=\varphi(p), \quad dx=\varphi'(p)dp,$$
тада је $dy=p\varphi'(p)dp$, па се општи облик решења једначине $F(x,y')=0$ у параметарску облику може записати као
$$x=\varphi(p), \quad y=\int p\varphi'(p)dp.$$

2. Нека је једначина $F(x,y,y')=0$ облика
$$F(y,y')=0,$$
и претпоставимо да се $F(y,y')=0$ може записати као $y=\varphi(y')$. Ако уведемо параметар $y'=p$, што даје $dy=pdx$ и
$$y=\varphi(p) \quad dy=\varphi'(p)dp$$
тада је $pdx=\varphi'(p)dp$, односно $dx=\frac{\varphi'(p)dp}{p}$, па се општи облик решења једначине $F(y,y')=0$ у параметарском облику може записати као
$$y=\varphi(p), \quad x=\int\frac{\varphi'(p)dp}{p}.$$

3. Нека је диференцијална једначина $F(x,y,y')=0$ облика
$$y=g(x,y'),$$
где је g дата функција. Ако ставимо
$$y'=p\Rightarrow y=g(x,p),$$
што после диференцирања даје
$$dy=pdx \quad \text{и} \quad dy=\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial p}dp$$
$$\Rightarrow pdx=\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial p}dp\Leftrightarrow\frac{dp}{dx}=\frac{p-\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial p}}.$$

Ако се опште решење последње диференцијалне једначине означи са

$$p = \varphi(x, C),$$

тада се опште решење полазне једначине $y = g(x, y')$ може записати

$$y = g\big(x, \varphi(x, C)\big).$$

4. Нека је диференцијална једначина $F(x, y, y') = 0$ облика

$$x = g(y, y'),$$

где је g дата функција. Ако уведемо смену $y' = p$ тада се после диференцирања једначина $x = g(y, y')$ своди на

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial p}dp \Leftrightarrow \frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial p}}.$$

Ако се опште решење последње једначине означи са $p = \psi(y, C)$, тада се опште решење полазне једначине $x = g(y, y')$ може записати у облику

$$x = g\big(y, \psi(y, C)\big).$$

Пример 12. *Наћи опште решење диференцијалне једначине:* $x = (y')^2 + 2$.

Решење:
За решавање ове једначине користићемо параметризацију. Како је дата једначина записана у облику $x = \varphi(y')$, у питању је 1. случај.
Нека је $y' = p$, где је p параметар. Тада је

$$x = p^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2pdp.$$

Како је $\dfrac{dy}{dx} = p$ добијамо да је

$$dy = pdx = 2p^2dp,$$

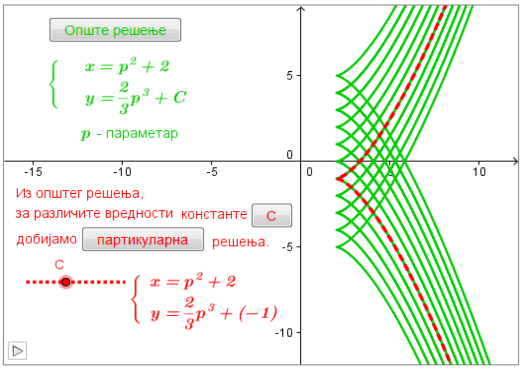
што након интеграције даје

$$y = \int 2p^2dp = \frac{2}{3}p^3 + C, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Дакле, опште решење дате једначине у параметарском облику је

$$x = p^2 + 2$$

$$y = \frac{2}{3}p^3 + C.$$



Слика 2.10. *Илустрација решења дате једначине*

2.9.2 Лагранжова диференцијална једначина

Дефиниција 2.8. Лагранжова[2] диференцијална једначина *је једначина облика*

$$y = xL_1(y') + L_2(y') \quad \textit{или} \quad y = xL_1(p) + L_2(p),$$

где је $p = y'$, *а* L_1 *и* L_2 *дате функције.*

Како је $y' = p$ следи да је $dy = pdx$, па диференцирањем Лагранжове једначине добијамо

$$pdx = L_1(p)dx + xL_1'(p)dp + L_2'(p)dp \Leftrightarrow dx(p - L_1(p)) - L_1'(p)xdp = L_2'(p)dp$$

Ако претпоставимо да је $p - L_1(p) \neq 0$, следи да је

$$\frac{dx}{dp} = \frac{L_1'(p)}{p - L_1(p)}x + \frac{L_2'(p)}{p - L_1(p)}.$$

Ова функција је линеарна по x (јер је x функција од p), па је можемо записати у облику

$$x' - \frac{L_1'(p)}{p - L_1(p)}x = \frac{L_2'(p)}{p - L_1(p)}$$

и њено опште решење је облика

$$x = CM(p) + N(p)$$

где су M и N функције које треба одредити решавањем ове линеарне диференцијалне једначине.
Заменом у полазну једначину добијамо опште решење Лагранжове диференцијалне једначине

$$y = \big(CM(p) + N(p)\big)L_1(p) + L_2(p).$$

[2] Joseph-Louis, comte de Lagrange (1736-1813), италијанско-француски математичар и астроном

Ако је, за неко $p = p_0$, $p - L_1(p) = 0$, тада је сингуларно решење једначине $y = xL_1(y') + L_2(y')$ дато са

$$y = xL_1(p_0) + L_2(p_0).$$

Ако је $L_1(p) - p \equiv 0$, тада се полазна једначина зове *Клероова диференцијална једначина.*

Пример 13. *Наћи опште решење следеће диференцијалне једначине:* $y = 2xy' - 4(y')^3$.

Решење:
Дата једначина је Лагранжова и може се записати у облику

$$y = 2xp - 4p^3$$

где је $y' = p$ и $dy = pdx$.
Када диференцирамо једначину $y = 2xp - 4p^3$ имаћемо

$$\begin{aligned} dy = pdx &= 2pdx + 2xdp - 12p^2dp \\ \Leftrightarrow \quad -pdx &= 2(x - 6p^2)dp \\ \Leftrightarrow \quad -\frac{dx}{dp} &= \frac{2}{p}(x - 6p^2) \end{aligned}$$

Добили смо линеарну диференцијалну једначину по $x = x(p)$:

$$x' + \frac{2}{p}x = 12p.$$

Имамо да је

$$P(p) = \frac{2}{p}\ ,\ Q(p) = 12p.$$

Нека је

$$I_1 = \int P(p)dp = \int \frac{2}{p}dp = 2\ln|p| = \ln p^2$$

$$I_2 = \int Q(p)e^{\int P(p)dp}dp = 12\int pe^{\ln p^2}dp = 12\int p^3dp = 12\frac{p^4}{4} = 3p^4.$$

Тада је опште решење облика

$$\begin{aligned} x &= e^{-\ln p^2}(C + 3p^4) \\ \Leftrightarrow \quad x &= \frac{1}{p^2}(C + 3p^4) \\ \Leftrightarrow \quad x &= \frac{C}{p^2} + 3p^2. \end{aligned}$$

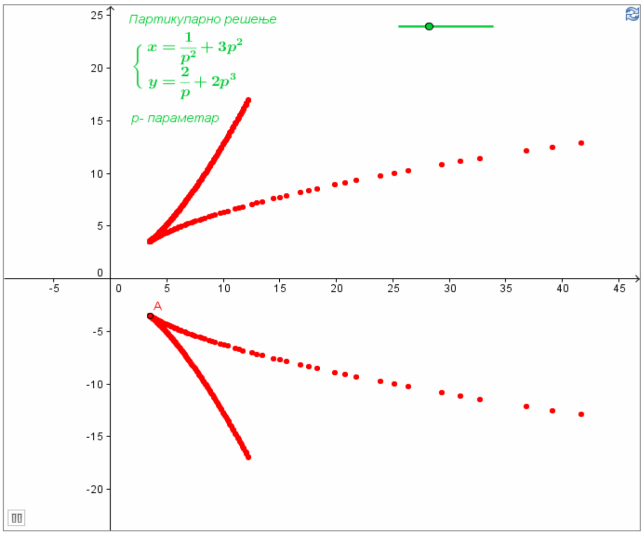
Сада када заменимо x у полазну једначину добијамо да је

$$y = 2p\left(\frac{C}{p^2} + 3p^2\right) - 4p^3 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2C}{p} + 2p^3.$$

Дакле, опште решење дате једначине у параметарском облику је

$$x = \frac{C}{p^2} + 3p^2$$

$$y = \frac{2C}{p} + 2p^3.$$



Слика 2.11. *Илустрација решења у параметарском облику за* $C = 1$

2.9.3 Клероова диференцијална једначина

Дефиниција 2.9. Клероова[3] **диференцијална једначина** *је једначина*

$$y = xy' + K(y') \quad \text{или} \quad y = xp + K(p),$$

где је $y' = p$ *параметар, а* K *дата функција.*

Клероова диференцијална једначина је специјални случај Лагранжове диференцијалне једначине.
Ако Клероову једначину диференцирамо по x, добија се

$$\frac{dy}{dx} = p = p + x\frac{dp}{dx} + K'(p)\frac{dp}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (x + K'(p))\frac{dp}{dx}.$$

Приликом решавања једначине

$$(x + K'(p))\frac{dp}{dx} = 0$$

разликујемо два случаја:

1. Ако је $\frac{dp}{dx} = 0$ следи $p = C$, што заменом у полазну једначину даје *опште решење* Клероове диференцијалне једначине

$$y = Cx + K(C).$$

[3] Alexis Claude Clairaut (1713-1765), француски математичар

2. Ако се једначина $x + K'(p) = 0$ може решити по p, односно ако постоји функција $\psi = \psi(x)$ таква да је $p = \psi(x)$ решење једначине $x + K'(p) = 0$, тада је

$$y = x\psi(x) + K(\psi(x)),$$

сингуларно решење Клероове диференцијалне једначине.

Пример 14. *Наћи опште и сингуларно решење следеће диференцијалне једначине:* $y = xy' + y' - (y')^2$.

Решење:
Дата диференцијална једначина је Клероова, па се може записати у облику

$$y = xp + p - p^2$$

где је p параметар и $y' = p \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = p$. Диференцирањем полазне једначине по x добијамо

$$\frac{dy}{dx} = p = p + x\frac{dp}{dx} + (1 - 2p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + 1 - 2p)\frac{dp}{dx} = 0$$

Ако је

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad \Rightarrow p = C$$

добијамо да је опште решење Клероове диференцијалне једначине облика

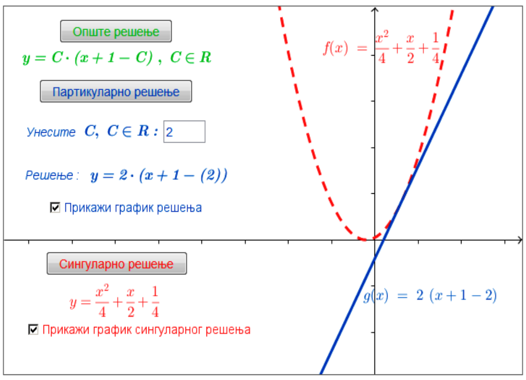
$$y = Cx + C - C^2.$$

Сингуларно решење се добија из услова $x + 1 - 2p = 0$. Тада је

$$p = \psi(x) = \frac{x+1}{2},$$

па када заменимо у полазну једначину, након сређивања, добијамо сингуларно решење облика

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$



Слика 2.12. *Илустрација сингуларног и партикуларног решења за вредност константе C коју је корисник унео*

3 Диференцијалне једначине вишег реда

3.1 Линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима

Дефиниција 3.1. *Једначину*

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0 y(x) = f(x),$$

где су a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, *произвољне константе, називамо* **линеарном диференцијалном једначином n-тог реда са константним коефицијентима**.

Разликујемо два случаја која ћемо касније детаљније разматрати:

1. Ако је $f(x) \equiv 0$, тада ова једначина постаје **хомогена линеарна диференцијална једначина n-тог реда са константним коефицијентима**
2. Ако постоји бар неко $x \in \mathbf{D}$ такво да је $f(x) \neq 0$, тада добијамо **нехомогену линеарну диференцијалну једначину n-тог реда са константним коефицијентима**

3.1.1 Хомогена линеарна диференцијална једначина

Дефиниција 3.2. *Једначину облика*

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0 y(x) = 0$$

где су $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ *називамо* **хомогеном линеарном диференцијалном једначином n-тог реда са константним коефицијентима**.

Одредимо линеарно независна решења $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ове једначине.

Дефиниција 3.3. *Функције* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *називамо* **линеарно независним** *на домену* D*, ако из*

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) \equiv 0,$$

где су $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbf{R}$*, следи* $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$.

Функције које нису линеарно независне називамо **линеарно зависним**.

Решење ћемо, према Ојлеру, потражити у облику

$$y(x) = e^{rx}, \quad r \in \mathbf{R} \text{ или } r \in \mathbf{C}.$$

Изводи ове функције су

$$y^{(k)}(x) = r^k e^{rx}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Заменом $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ у полазну једначину добија се

$$e^{rx}(a_n r^n + a_{n-1} r^{(n-1)} + \ldots + a_1 r + a_0) = 0.$$

Да би функција $y(x) = e^{rx}$ била решење полазне једначине мора бити

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{(n-1)} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0,$$

односно,

$$P(r) = 0, \quad P(r) := a_n r^n + a_{n-1} r^{(n-1)} + \ldots + a_1 r + a_0.$$

Добијена алгебарска једначина по r се назива **карактеристична једначина**, а њена решења су **карактеристични корени** дате диференцијалне једначине.
Основни став алгебре каже да су сви корени алгебарске једначине $P(r) = 0$ степена n реални или комплексни бројеви и да их има тачно n, међу којима може бити и једнаких.
У зависности од природе карактеристичних корена разликујемо следећа два случаја:

I **Реални карактеристични корени**
Нека је r реалан карактеристични корен вишеструкости k. Њему одговарају линеарно независна партикуларна решења полазне једначине

$$y_1(x) = e^{rx}, \ \ldots, \ y_n(x) = x^{k-1} e^{rx}.$$

II **Комплексни карактеристични корени**
Нека је $r_1 = a + ib$, $b \neq 0$ један комплексан корен карактеристичне једначине $P(r) = 0$ вишеструкости l. Тада је и њему коњуговано комплексан број $r_2 = a - ib$ такође корен исте једначине исте вишеструкости l. Овим карактеристичним коренима одговарају следећа линеарно независна партикуларна решења полазне једначине

$$\begin{array}{rl} y_1(x) = e^{ax}\cos bx, & \ldots \quad , y_l(x) = x^{l-1} e^{ax}\cos bx, \\ y_{l+1}(x) = e^{ax}\sin bx, & \ldots \quad , y_2 l(x) = x^{l-1} e^{ax}\sin bx. \end{array}$$

Овде смо користили да је

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}\cos bx + i e^{ax}\sin bx.$$

Формирајући за сваки карактеристични корен, према правилу I и II, линеарно независна партикуларна решења, добијамо опште решење полазне једначине као линеарну комбинацију тих линеарно независних решења.

Посматрајмо хомогену диференцијалну једначину другог реда

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

тада у зависности од решења карактеристичне једначине

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

имамо следеће облике општих решења дате једначине:

1. Нека су корени карактеристичне једначине реални и различити и означимо их са r_1 и r_2. Тада је опште решење

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

2. Нека су корени карактеристичне једначине реални и једнаки и означимо их са r_1. Тада је опште решење

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}.$$

3. Нека су корени карактеристичне једначине конјуговано комплексни бројеви $r_1 = a + ib$ и $r_2 = a - ib$. Тада је опште решење

$$y(x) = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

Пример 15. *Решити диференцијалну једначину:* $y'' - 5y' + 4y = 0$.

Решење:
Дата једначина је хомогена линеарна диференцијална једначина са константним коефицијентима, па је њена карактеристична једначина

$$r^2 - 5r + 4 = 0$$

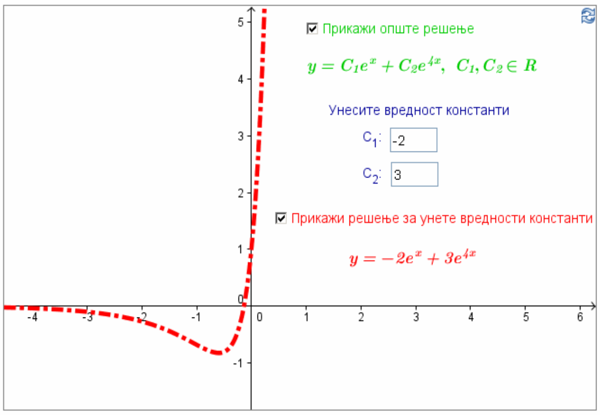
Корени карактеристичне једначине су

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = 4.$$

Како су карактеристични корени реални и различити, имамо да је опште решење дате диференцијалне једначине

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x},$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе.



Слика 3.1. *Илустрација решења за неке вредности константи* C_1 *и* C_2

Пример 16. *Одредити решење диференцијалне једначине:* $y'' + 9y = 0$.

Решење:
Дата једначина је хомогена линеарна диференцијална једначина са константним коефицијентима, па је њена карактеристична једначина

$$r^2 + 9 = 0,$$

чији су корени конјуговано комплексни бројеви

$$r_1 = 3i, \quad r_2 = -3i,$$

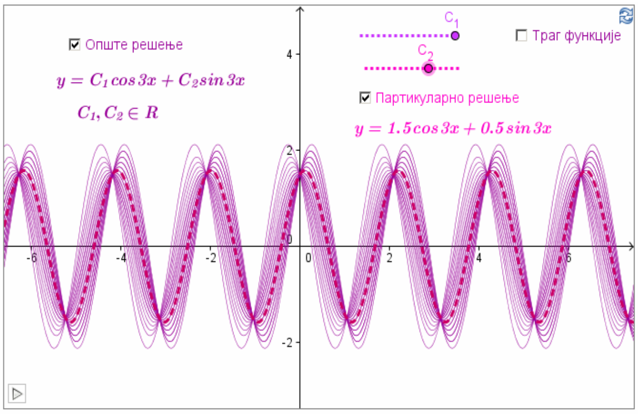
па је опште решење облика

$$y(x) = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

Како је $a = 0$ и $b = 3$, из претходног добијамо опште решење полазне диференцијалне једначине

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x,$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе.



Слика 3.2. *Илустрација решења за неке вредности константи* C_1 *и* C_2

Примери су засновани на [1] и [3], где се може наћи још сличних примера.

3.1.2 Нехомогена линеарна диференцијална једначина

Дефиниција 3.4. *Једначину облика*

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0 y(x) = f(x)$$

где су $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ *називамо* **нехомогеном линеарном диференцијалном једначином n-тог реда са константним коефицијентима**.

Опште решење ове једначине можемо тражити у облику

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

где је y_h опште решење одговарајуће хомогене диференцијалне једначине, док је y_p партикуларно решење полазне диференцијалне једначине, које зависи од функције f на десној страни једначине.
У неким случајевима се унапред може знати облик партикуларног решења и тада се оно одређује методом неодређених коефицијената.

1. Нека је функција f облика $f(x) = e^{lx}P_n(x)$, где је P_n полином n-тог степена и l реалан број.

   а) Ако l није корен карактеристичне једначине $P(r) = 0$, тада је партикуларно решење облика
   $$y_p(x) = e^{lx}Q_n(x),$$
   где је Q_n полином n-тог степена са неодређеним коефицијентима. Полином Q_n се одређује на основу услова да је $y_p(x) = e^{lx}Q_n(x)$ решење полазне диференцијалне једначине.
   Потребно је наћи изводе $y_p', y_p'', \ldots, y_p^{(n)}$, а затим њих и функцију y_p заменити у полазну једначину, одакле ћемо одредити непознате коефицијенте полинома Q_n, изједначавањем коефицијената уз исте степене променљиве x.

   б) Ако l јесте корен карактеристичне једначине $P(r) = 0$, тада је партикуларно решење облика
   $$y_p(x) = x^k e^{lx}Q_n(x),$$
   где је k вишеструкост корена l, док је Q_n полином степена n са неодређеним коефицијентима које ћемо одредити као у претходном случају.

2. Нека је функција f облика $f(x) = e^{lx}(P_s(x)\cos bx + Q_t(x)\sin bx)$, где су P_s и Q_t полиноми степена s и t респективно.

   а) Ако $z_1 = l + ib$ и $z_2 = l - ib$ нису решења карактеристичне једначине $P(r) = 0$, тада је партикуларно решење облика
   $$y_p(x) = e^{lx}(R_n(x)\cos bx + S_n(x)\sin bx),$$
   где су R_n и S_n полиноми степена $n = max(s,t)$ са неодређеним коефицијентима, које одређујемо као у случају 1.

   б) Ако су $z_1 = l + ib$ и $z_2 = l - ib$ решења карактеристичне једначине $P(r) = 0$, тада је партикуларно решење облика
   $$y_p(x) = x^k e^{lx}(R_n(x)\cos bx + S_n(x)\sin bx),$$
   где је k вишеструкост корена z_1 (и z_2), док су R_n и S_n полиноми степена $n = max(s,t)$ са неодређеним коефицијентима, које одређујемо као у случају 1.

Постоји још један начин за одређивање партикуларног решења нехомогене диференцијалне једначине n-тог реда.
Ако је у диференцијалној једначини
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f(x)$$

функција f облика

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)$$

где су функције $f_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$ једног од облика из случајева 1. и 2., тада рачунамо партикуларно решење на следећи начин. Одређује се партикуларно решење y_{pi} диференцијалне једначине

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Тада је партикуларно решење y_p полазне диференцијалне једначине облика

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} + \ldots + y_{pk}.$$

Пример 17. *Решити диференцијалну једначину:* $y'' - y' - 6y = 36x$.

Решење:
Дата једначина је нехомогена линеарна диференцијална једначина са константним коефицијентима, па њено решење тражимо у облику

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

где је $y_h(x)$ опште решење одговарајуће хомогене једначине, а $y_p(x)$ партикуларно решење полазне једначине. Одговарајућа хомогена једначина је

$$y'' - y' - 6y = 0,$$

па је њена карактеристична једначина

$$r^2 - r - 6 = 0$$

Корени карактеристичне једначине су

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \ \Rightarrow\ r_1 = -2, \quad r_2 = 3.$$

Како су карактеристични корени реални и различити, имамо да је опште решење хомогене диференцијалне једначине

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x},$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе.
Опште решење дате диференцијалне једначине ће бити облика

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + y_p(x).$$

Треба јо да одредимо партикуларно решење полазне једначине. Како је на десној страни дате диференцијалне једначине полином првог степена (случај 1.), то партикуларно решење $y_p(x)$ тражимо у облику

$$y_p(x) = ax + b,$$

где су a и b константе које треба одредити. Тада је $y_p'(x) = a$ и $y_p''(x) = 0$, па заменом y_p, y_p' и y_p'' у дату диференцијалну једначину добијамо

$$-a - 6(ax + b) = 36x$$

Изједначавањем коефицијената уз исте степене променљиве x, добијамо да је $a = -6$ и $b = 1$, па је партикуларно решење

$$y_p(x) = -6x + 1$$

и опште решење полазне диференцијалне једначине је

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - 6x + 1.$$

Пример 18. *Решити диференцијалну једначину:* $y'' + y' = \sin x$.

Решење:

Дата једначина је нехомогена линеарна диференцијална једначина са константним коефицијентима, па њено решење тражимо у облику

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

где је $y_h(x)$ опште решење одговарајуће хомогене једначине, а $y_p(x)$ партикуларно решење полазне једначине.
Одговарајућа хомогена диференцијална једначина је

$$y'' + y = 0,$$

па је њена карактеристична једначина

$$r^2 + 1 = 0,$$

чији су корени $r_1 = i$ и $r_2 = -i$.
Сада је опште решење хомогене диференцијалне једначине

$$y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе.
Опште решење дате диференцијалне једначине ће бити облика

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + y_p(x).$$

Треба још да одредимо партикуларно решење полазне једначине. Како је функција на десној страни дате диференцијалне једначине облика

$$f(x) = e^{lx}(P_s(x) \cos bx + Q_t(x) \sin bx),$$

односно

$$\sin x = e^{0 \cdot x}(1 \cdot \sin x),$$

и како је $l = 0$, $b = 1$, и i јесте нула карактеристичне једначине вишеструкости 1, на основу случаја 2, партикуларно решење $y_p(x)$ тражимо у облику

$$y_p(x) = x(a \cos x + b \sin x),$$

где су a и b константе које треба одредити.
Тада је

$$y_p'(x) = (a \cos x + b \sin x) + x(-a \sin x + b \cos x),$$

$$y_p''(x) = (-a\sin x + b\cos x) + x(-a\cos x - b\sin x) - a\sin x + b\cos x,$$

односно,

$$y_p''(x) = -2\sin x + 2b\cos x + x(-a\cos x - b\sin x)$$

па заменом y_p'' и y_p у дату диференцијалну једначину добијамо

$$-2a\sin x + 2b\cos x = \sin x.$$

Изједначавањем коефицијената добијамо

$$-2a = 1 \;\Rightarrow\; a = -\frac{1}{2}$$

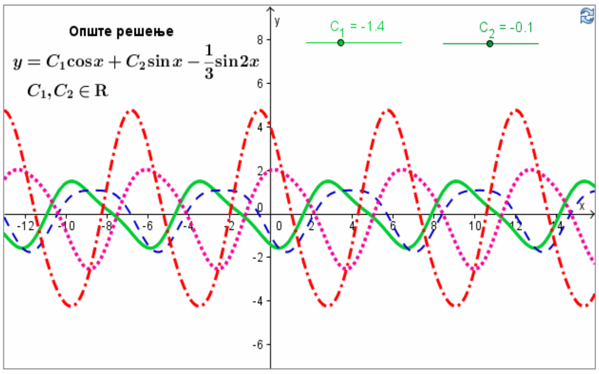
$$2b = 0 \;\Rightarrow\; b = 0.$$

Дакле, партикуларно решење је облика

$$y_p(x) = -\frac{x}{2}\cos x$$

и опште решење полазне диференцијалне једначине је

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x}{2}\cos x.$$



Слика 3.3. *Илустрација партикуларних решења за неке вредности константи C_1 и C_2*

Примери су засновани на [1] и [3], где се може наћи још сличних примера.

3.2 Линеарне диференцијалне једначине са функционалним коефицијентима

Дефиниција 3.5. *Једначину*

$$A_n(x)y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_0(x)y = f(x)$$

где су $A_n(x), A_{n-1}(x), \ldots, A_0(x)$ и $f(x)$ реалне и непрекидне функције на неком интервалу D, називамо **линеарном диференцијалном једначином реда** $n \in \mathbf{N}$.

Посматраћемо само случај $A_n(x) \equiv 1$ за све $x \in D$, односно једначину

$$y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_0(x)y = f(x).$$

Ако је $f(x) = 0$ за свако $x \in D$, тада се једначина

$$y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_0(x)y = 0$$

зове *хомогена линеарна диференцијална једначина реда* $n \in \mathbf{N}$.
Ако је за неко $x \in D$ функција $f(x) \neq 0$, тада за једначину

$$y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_0(x)y = f(x)$$

кажемо да је *нехомогена линеарна диференцијална једначина реда* $n \in \mathbf{N}$.

За диференцијалну једначину

$$y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_0(x)y = f(x)$$

реда $n \in \mathbf{N}$ на интервалу (a, b), природно је решење тражити у скупу $C^n(a, b)$, који чине функције које имају n-ти непрекидан извод на (a, b).

Следећа теорема даје услове постојања и јединствености решења Кошијевог проблема за линеарну диференцијалну једначину реда n.

Теорема 3.1. *Нека су у једначини*

$$y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_0(x)y = f(x)$$

функције $A_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, и f непрекидне на интервалу (a, b) и нека су дати бројеви $x_0 \in (a, b)$, и t_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Тада ова једначина има јединствено решење $y = y(x)$ у скупу $C^n(a, b)$, које задовољава почетне услове

$$y(x_0) = t_0,\ y'(x_0) = t_1,\ y''(x_0) = t_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = t_{n-1}.$$

3.2.1 Хомогена линеарна диференцијална једначина

Посматрајмо хомогену линеарну диференцијалну једначину реда n

$$y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_0(x)y = 0.$$

Уведимо у разматрање оператор $L : C^n(D) \to C(D)$ дефинисан на следећи начин:

$$L(y) := y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_0(x)y.$$

Оператор L је линеаран јер задовољава услове:

1. $\forall y_1, y_2 \in C^n(D) : L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$,
2. $\forall \alpha \in \mathbf{R}\ \forall y \in C^n(D) : L(\alpha x) = \alpha L(x)$.

Оператор L се често назива линеарни диференцијални оператор реда n. Користећи оператор L једначину

$$y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_0(x)y = 0$$

можемо записати кратко $L(y) = 0$.

Нека су $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ решења једначине $L(y) = 0$. Детерминанту

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ {y_1}^{(n-1)}(x) & {y_2}^{(n-1)}(x) & \ldots & {y_n}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

називамо **детерминантом Вронског**[4] (**Вронскијан**) од функција $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Лема 3.1. *Следећа тврђења су еквивалентна:*

1) $\forall x \in \mathbf{D} : W(x) = 0$.

2) $\exists x_0 \in \mathbf{D} : W(x_0) = 0$.

3) Решења $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, $x \in \mathbf{D}$ *једначине* $L(y) = 0$ *су линеарно зависна.*

Лема 3.2. *Следећа тврђења су еквивалентна:*

1) $\forall x \in \mathbf{D} : W(x) \neq 0$.

2) $\exists x_0 \in \mathbf{D} : W(x_0) \neq 0$.

3) Решења $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, $x \in \mathbf{D}$ *једначине* $L(y) = 0$ *су линеарно независна.*

Доказ ове две леме се може наћи у [2].
Ако диференцирамо детерминанту $W(x)$ имамо

$$W'(x) = W_1'(x) + W_2'(x) + \ldots + W_n'(x),$$

где је $W_i'(x)$ детерминанта која настаје из $W(x)$ када се i-ти ред диференцира. Можемо уочити да је $W_i'(x) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$. Остаје

$$W'(x) = W_n'(x),$$

односно,

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ {y_1}^{(n-2)} & {y_2}^{(n-2)} & \ldots & {y_n}^{(n-2)} \\ {y_1}^{(n)} & {y_2}^{(n)} & \ldots & {y_n}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Како је $L(y_i) = 0$, то је

$$y_i^{(n)} = -A_{n-1}(x)y_i^{(n-1)} - A_{n-2}(x)y_i^{(n-2)} - \ldots - A_0(x)y_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

[4] Jozef Hoene-Wronski (1778-1853), пољски математичар и физичар

Заменом $y_i^{(n)}$ у $W'(x)$ добијамо

$$W'(x) = -A_{n-1}(x)W(x)$$

што након интеграције даје

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{\left(-\int_{x_0}^{x} A_{n-1}(t)dt\right)}.$$

Добијену једнакост називамо **формулом Остроградског-Лиувила**.

Лема 3.3. *Једначина $L(y) = 0$ има n линеарно независних решења.*

Доказ:

Сагласно теореми 3.1. следи да постоје решења $y_1, y_2, \ldots, y_n$ једначине $L(y) = 0$ која задовољавају следеће почетне услове:

$$\begin{array}{llll}
y_1(x_0) = 1, & y_1'(x_0) = 0, & \ldots, & y_1^{(n-1)}(x_0) = 0 \\
y_2(x_0) = 0, & y_2'(x_0) = 1, & \ldots, & y_2^{(n-1)}(x_0) = 0 \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
y_n(x_0) = 0, & y_n'(x_0) = 0, & \ldots, & {y_n}^{(n-1)}(x_0) = 1.
\end{array}$$

Тада је вредност Вронскијана у тачки x_0 различита од нуле, јер је

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Одатле следи, на основу леме 3.2., да су $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линеарно независна решења једначине $L(y) = 0$. □

Теорема 3.2. *Произвољних n линеарно независних решења једначине $L(y) = 0$ образује базу простора решења те једначине.*

Доказ:

Нека су $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линеарно независна решења једначине $L(y) = 0$. Нека је $y = \varphi(x)$ решење једначине $L(y) = 0$ које задовољава почетни услов

$$\varphi^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)},\ i = 0, 1, \ldots, n-1;\ (x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbf{D} \times \mathbf{R^n}.$$

Треба доказати да се решење $y = \varphi(x)$ може представити као линеарна комбинација функција

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x).$$

Да бисмо то доказали формирајмо систем линеарних алгебарских једначина

$$C_1y_1^{(i)}(x_0)+C_2y_2^{(i)}(x_0)+\ldots+C_ny_n^{(i)}(x_0)=y_0^{(i)},\ i=0,1,\ldots,n-1$$

са непознатим $C_1, C_2, \ldots, C_n$.
Детерминанта овог система је $W(x_0)$ и пошто су решења $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линеарно независна имаћемо да је
$W(x_0)\neq 0$, па систем има јединствено решење $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$.
Тада је функција

$$y=\psi(x)=C_1^0y_1(x)+C_2^0y_2(x)+\ldots+C_n^0y_n(x),\ x\in\mathbf{D}$$

решење једначине $L(y)=0$.
На основу теореме 3.1. следи да се решења $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$ морају поклапати на $\mathbf{D}$, односно,

$$\forall x\ \in\mathbf{D}:\ \varphi\equiv C_1^0y_1(x)+C_2^0y_2(x)+\ldots+C_n^0y_n(x).$$

Константе $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ су координате ,,тачке" $y=\varphi(x)$ у простору димензије n са базом $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, што је и требало доказати. □

Уобичајено је да се база простора решења назива *фундаменталним системом решења једначине.*

На основу претходне теореме, важи:
Ако су $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линеарно независна решења хомогена линеарне диференцијалне једначине $L(y)=0$, та решења чине фундаментални систем решења те једначине, па је **опште решење** дато са

$$y_h(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x),$$

где су $C_1, C_2, \ldots, C_n$ произвољне константе.

Пример 19. *Показати да једначина*

$$y'''-\frac{3}{x}y''+\frac{6}{x^2}y'-\frac{6}{x^3}y=0$$

има фундаментални систем решења $y_1=x$, $y_2=x^2$, $y_3=x^3$. *Наћи опште решење дате једначине.*

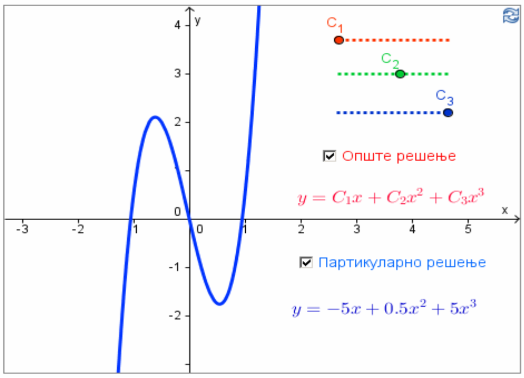
Решење:
Да бисмо проверили да ли решења y_1, y_2 и y_3 чине фундаментални систем решења дате једначине, треба да проверимо њихову линеарну независност израчунавањем детерминанте Вронског:

$$W[y_1,y_2,y_3]=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x)\\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3\\ 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 2 & 6x\end{vmatrix}=2x^3\neq 0,\quad x\neq 0.$$

Дакле, решења y_1, y_2 и y_3 су линеарно независна, па чине фундаментални систем решења дате једначине.
Опште решење је дато са

$$y(x)=C_1x+C_2x^2+C_3x^3\,,$$

где су C_1, C_2 и C_3 произвољне константе.



Слика 3.4. *Аплет који приказује партикуларно решење у зависности од промене константи C_1, C_2 и C_3*

3.2.2 Метод варијације константи

Дефиниција 3.6. *Нехомогена линеарна диференцијална једначина реда n је једначина облика*

$$y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_0(x)y = f(x),$$

где су $A_n(x), A_{n-1}(x), \ldots, A_0(x), f(x)$ реалне функције непрекидне на неком интервалу $\mathbf{D}$.

Можемо је краће записати као

$$L(y) = f(x), \text{ где је } L(y) := y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_0(x)y.$$

Да бисмо одредили решење ове једначине биће нам потребна и одговарајућа хомогена једначина

$$L(y) = 0.$$

Теорема 3.3. *Нека је $y = y_h(x)$ опште решење хомогене једначине $L(y) = 0$ и $y = y_p(x)$ било које решење нехомогене једначине $L(y) = f(x)$. Тада је опште решење нехомогене линеарне једначине $L(y) = f(x)$ функција*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x), \quad x \in \mathbf{D}.$$

Доказ ова теореме се може наћи у [2].
Како смо већ показали на који начин се одређује опште решење хомогене линеарне једначине $L(y) = 0$, остаје нам да нађемо партикуларно решења нехомогене линеарне једначине $L(y) = f(x)$.

Ако је познат фундаментални систем решења

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$$

хомогене диференцијалне једначине $L(y) = 0$, тада је опште решење функција облика

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x),$$

где су $C_k,\ k=1,2,\dots,n$ константе и тада се за одређивање партикуларног решења нехомогене диференцијалне једначине $L(y)=f(x)$ може применити **метода варијације константи (Лагранжова метода)**.

Метод варијације константи се састоји у следећем:
произвољне константе сматрамо диференцијабилним функцијама по x, а затим их одређујемо из услова да функција

$$y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\ldots+C_n(x)y_n(x),\quad x\in\mathbf{D}$$

буде решење нехомогене диференцијалне једначине

$$L(y)=f(x).$$

Нађимо изводе функције

$$y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\ldots+C_n(x)y_n(x)$$

до закључно са n-тим редом, дајући допунске услове за произвољне функције $C_k(x),\quad k=1,\dots,n$.

$$y'=\sum_{k=1}^{n}C_k'(x)y_k(x)+\sum_{k=1}^{n}C_k(x)y_k'(x).$$

Ако је

$$\sum_{k=1}^{n}C_k'(x)y_k(x)=0\ \Rightarrow\ y''=\sum_{k=1}^{n}C_k'(x)y_k'(x)+\sum_{k=1}^{n}C_k(x)y_k''(x).$$

Нека је

$$\sum_{k=1}^{n}C_k'(x)y_k'(x)=0\ \Rightarrow\ y^{(3)}=\sum_{k=1}^{n}C_k'(x)y_k''(x)+\sum_{k=1}^{n}C_k(x)y_k^{(3)}(x).$$

Настављајући овај поступак, уз претпоставку

$$\sum_{k=1}^{n}C_k'(x)y_k^{(s-1)}(x)=0,\quad s=3,4,\dots,n-1$$

добијамо

$$y^{(n-1)}=\sum_{k=1}^{n}C_k(x)y_k^{(n-1)}(x),$$

$$y^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}C_k'(x)y_k^{(n-1)}(x)+\sum_{k=1}^{n}C_k(x)y_k^{(n)}(x).$$

Како функција

$$y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\ldots+C_n(x)y_n(x)$$

треба да буде решење једначине $L(y) = f(x)$, то заменом $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ у ту једначину имамо

$$L(y) \equiv \sum_{k=1}^{n} C_k(x)L(y_k) + \sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k^{(n-1)} = f(x).$$

Одавде следи

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k^{(n-1)} = f(x)$$

јер је $L(y_1) = L(y_2) = \ldots = L(y_n) = 0$.

Ако објединимо све услове које смо поставили за функције $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$, видећемо да оне задовољавају систем линеарних једначина

$$\begin{array}{l}
C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) = 0 \\
C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) = 0 \\
\vdots \\
C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\
C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x)
\end{array}$$

чија је детерминанта $W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$, јер су $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линеарно независне функције, а решење система

$$C_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

где је $W_i(x)$ детерминанта која настаје из детерминанте $W(x)$ када се i-та колона замени колоном $(0, 0, \ldots, 0, f(x))$ (Крамерово правило).
Тада су функције $C_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$ облика

$$C_i(x) = \int \frac{W_i(x)}{W(x)} dx + D_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

где су $D_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$ константе.
Заменом функција $C_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$ у једнакост

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)$$

добијамо функцију која је решење полазне нехомогене једначине

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \cdot \int \frac{W_i(x)}{W(x)} dx + \sum_{k=1}^{n} D_k y_k(x).$$

Пример 20. *Решити диференцијалну једначину методом варијације константи:* $y'' - 2y' = e^x \sin x$.

Решење:
Посматрајмо одговарајућу хомогену једначину

$$y'' - 2y' = 0$$

Њена карактеристична једначина је

$$r^2 - 2r = 0 \;\Leftrightarrow\; r(r-2) = 0,$$

чији су корени $r_1 = 0,\ r_2 = 2$. Фундаментални систем решења одговарајуће хомогене диференцијалне једначине су функције 1 и e^{2x}. Опште решење полазне једначине је облика

$$y(x) = C_1(x)\cdot 1 + C_2(x)\cdot e^{2x}$$

где функције $C_1(x)$ и $C_2(x)$ треба одредити из система

$$\begin{array}{l} C_1'(x) + C_2'(x)e^{2x} = 0 \\ C_1'(x)\cdot 0 + 2C_2'(x)e^{2x} = e^x \sin x \end{array}$$

Из друге једначине система добијамо да је

$$C_2'(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\sin x$$

односно након интеграције,

$$C_2(x) = -\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x + \cos x) + D_2.$$

Из прве једначине система имаћемо да је

$$C_1'(x) = -C_2'(x)e^{2x} = -\frac{1}{2}e^{x}\sin x.$$

одакле, када интегралимо, применом парцијалне интеграције, добијамо

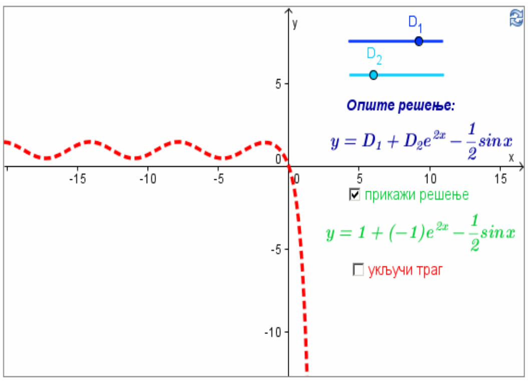
$$C_1(x) = -\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x - \cos x) + D_1.$$

D_1 и D_2 су произвољне константе. Када заменимо $C_1(x)$ и $C_2(x)$ у опште решење полазне диференцијалне једначине имаћемо

$$y(x) = -\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x - \cos x) + D_1 + e^{2x}(-\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x + \cos x) + D_2)$$

односно, након сређивања, добијамо

$$y(x) = D_1 + D_2e^{2x} - \frac{1}{2}\sin x.$$



Слика 3.5. *Аплет који приказује партикуларно решење у зависности од промене константи D_1 и D_2*

3.3 Неке линеарне диференцијалне једначине

Посматрамо линеарне диференцијалне једначине n-тог реда са неконстантним коефицијентима

$$y^{(n)} + A_{(n-1)}(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_0(x)y = 0$$

за које постоји смена $t = t(x)$, која одржава особину линеарности и хомогености те једначине и која је трансформише у диференцијалну једначину са константним коефицијентима. Такве смене су облика

$$t(x) = M \cdot \int \sqrt[n]{A_0(x)}dx,$$

где је $M \neq 0$ константа..
Линеарне једначине са овим својством су: *Ојлерова диференцијална једначина, диференцијална једначина Чебишева* и *Беселова диференцијална једначина*, са којима ћемо се детаљније упознати.

3.3.1 Ојлерова диференцијална једначина

Дефиниција 3.7. *Линеарна диференцијална једначина облика*

$$(ax+b)^n y^{(n)} + c_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + c_1(ax+b)y' + c_0 y = f(x),$$

где су $a \neq 0$, b, c_0, c_1, $\ldots$, c_{n-1} *константе, зове се* **Ојлерова** [5]**диференцијална једначина**.

Показаћемо да постоји смена која Ојлерову диференцијалну једначину своди на линеарну диференцијалну једначину са константним коефицијентима.

Нека је домен **D** такав да је $ax + b > 0$. Тада дељењем са $(ax+b)^n$ добијамо једначину облика

$$y^{(n)} + \frac{c_{n-1}}{ax+b}y^{(n-1)} + \ldots + \frac{c_1}{(ax+b)^{n-1}}y' + \frac{c_0}{(ax+b)^n}y = \frac{f(x)}{(ax+b)^n}$$

где је коефицијент уз y једнак $A_0(x) = \frac{c_0}{(ax+b)^n}$.
Сада из смене $t(x) = M \cdot \int \sqrt[n]{A_0(x)}dx$ следи

$$t(x) = M \cdot \int \sqrt[n]{\frac{c_0}{(ax+b)^n}}dx$$

одакле за $M = \frac{a}{\sqrt[n]{c_0}}$ добијамо

$$t(x) = \ln(ax+b) \quad \Leftrightarrow \quad ax + b = e^t.$$

[5] Leonhard Paul Euler (1707-1783), швајцарски математичар и физичар

Ако уведемо ову смену и обележимо са $z(t) = y(x) = y\Big(\dfrac{e^{\,t} - b}{a}\Big)$ нову непознату функцију z, тада имамо

$$\begin{aligned}
&y' = \tfrac{dy}{dx} = \tfrac{dz}{dt} \cdot \tfrac{dt}{dx} = a\, e^{-t} \tfrac{dz}{dt},\\
&y'' = a^2\, e^{-2t} \Big(\tfrac{d^2 z}{dt^2} - \tfrac{dz}{dt} \Big)\\
&\dots\\
&y^n(x) = a^n\, e^{-nt} \Big(\tfrac{d^n z}{dt^n} + b_1 \tfrac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} + \ldots + b_{n-1} \tfrac{dz}{dt} \Big),
\end{aligned}$$

где су $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ одговарајуће константе.
Када у Ојлерову диференцијалну једначину заменимо $y(x)$ и њене изводе, добијамо линеарну диференцијалну једначину са константним коефицијентима по непознатој функцији $z(t)$.
Ако она има фундаментални систем решења $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$, тада Ојлерова једначина има фундаментални систем решења

$$\varphi_1\big(\ln(ax+b)\big), \varphi_2\big(\ln(ax+b)\big), \ldots, \varphi_n\big(\ln(ax+b)\big),$$

па је опште решење њихова линеарна комбинација.

Пример 21. *Наћи опште решење Ојлерове диференцијалне једначине* $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$

Решење:

Дата диференцијална једначина је Ојлерова за $n = 2$ ($a = 1$, $b = 0$), па ћемо увести смену $x = e^t$.
Нека је $z(t) = y(x) = y(e^t)$. Тада је

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = \frac{1}{e^t} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dz}{dt},$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\Big(\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\Big).$$

Заменом y' и y'' у полазну једначину, добијамо

$$x^2 \cdot \frac{1}{x^2}(z'' - z') + 2x \cdot \frac{1}{x} z' - 6z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'' + z' - 6z = 0,$$

и то је хомогена линеарна диференцијална једначина са константним коефицијентима по непознатој функцији $z = z(t)$.
Одговарајућа карактеристична једначина

$$r^2 + r - 6 = 0$$

има корене

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \quad \Rightarrow \quad r_1 = 2, \quad r_2 = -3,$$

па је опште решење хомогене линеарне једначине

$$z(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$$

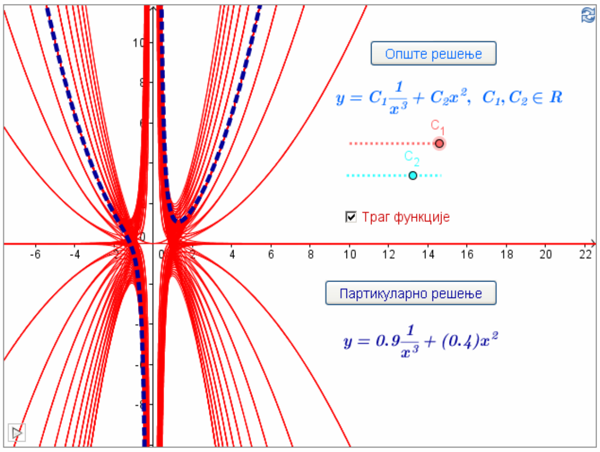
Када вратимо смену $x = e^t \ \Rightarrow t = \ln x$ добијамо

$$y(x) = C_1 e^{-3 \ln x} + C_2 e^{2 \ln x}.$$

Дакле, опште решење полазне диференцијалне једначине је

$$y(x) = C_1 \frac{1}{x^3} + C_2 x^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

- *Интерактивни приказ решења Ојлерове једначине*



Слика 3.6. *Приказ решења Ојлерове једначине*

Пример 22. *Одредити решење диференцијалне једначине:*
$(x+1)^3 y''' - 3(x+1)^2 y'' + 7(x+1)y' - 8y = 0.$

Решење:

Дата диференцијална једначина је Ојлерова за $n = 3$ $(a = 1, b = 1)$, па ћемо увести смену $x + 1 = e^t$.
Нека је $z(t) = y(x) = y(e^t - 1)$. Тада је

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = \frac{1}{e^t} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{dz}{dt},$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(x+1)^2}\Big(\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\Big),$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{(x+1)^3}\Big(\frac{d^3z}{dt^3} - 3\frac{d^2z}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt}\Big)$$

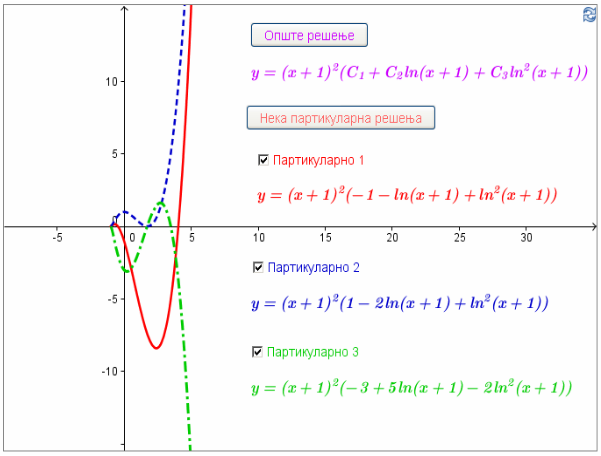
Заменом y', y'' и y''' у полазну једначину и сређивањем, добијамо

$$z''' - 6z'' + 12z' - 8z = 0,$$

и то је хомогена линеарна диференцијална једначина са константним коефицијентима по непознатој функцији $z = z(t)$.
Одговарајућа карактеристична једначина

$$r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r-2)^3 = 0$$

има корен $r_1 = 2$ вишеструкости 3, па је опште решење хомогене линеарне једначине
$$z(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + C_3 t^2 e^{2t}$$
Када вратимо смену $x + 1 = e^t \ \Rightarrow t = \ln(x+3)$ добијамо
$$y(x) = C_1 e^{2\ln(x+1)} + C_2 \ln(x+1) e^{2\ln(x+1)} + C_3 \ln^2(x+1) e^{2\ln(x+1)}.$$
Дакле, опште решење полазне диференцијалне једначине је
$$y(x) = (x+1)^2 (C_1 + C_2 \ln(x+1) + C_3 \ln^2(x+1)), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}.$$



Слика 3.7. *Графички приказ решења Ојлерове једначине*

3.3.2 Чебишева диференцијална једначина

Дефиниција 3.8. *Једначина*
$$(1 - x^2) y'' - x y' + n^2 y = 0$$
се зове **диференцијална једначина Чебишева**[6]**.**

Ако претпоставимо да је $(1 - x^2) \neq 0$, тада Чебишеву диференцијалну једначину можемо записати у облику
$$y'' - \frac{x}{1 - x^2} y' + \frac{n^2}{1 - x^2} y = 0.$$
Сменом
$$t(x) = M \cdot \int \sqrt[n]{A_0(x)}, \quad \text{за} \quad n = 2 \quad \text{и} \quad A_0(x) = \frac{n^2}{1 - x^2}$$
добијамо
$$t(x) = M \cdot n \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad \Leftrightarrow \quad t(x) = -M \cdot n \cdot \arccos x.$$

[6] Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894), руски математичар

За $M = -\frac{1}{n}$ добија се $t(x) = \arccos x$, односно $x = \cos t$.
Тада се полазна диференцијална једначина своди на линеарну диференцијалну једначину са константним коефицијентима
Израчунајмо y' и y'', при чему је $x = \cos t$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\sin t},$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \Big(-\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\sin t}\Big)' = -\Big(\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{\sin t} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t}\Big) \cdot \Big(-\frac{1}{\sin t}\Big)$$

Заменом $x = \cos t$, y' и y'' у једначину Чебишева

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

добијамо линеарну диференцијалну једначину са константним коефицијентима

$$y'' + n^2y = 0.$$

Карактеристична једначина добијене линеарне једначине је

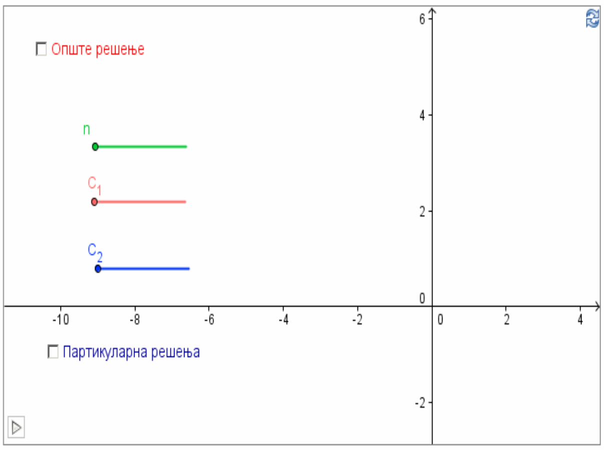
$$r^2 + n^2 = 0$$

па су њени карактеристични корени конјуговано комплексни $r_1 = i \cdot n$ и $r_2 = -i \cdot n$.
Тада је опште решење облика

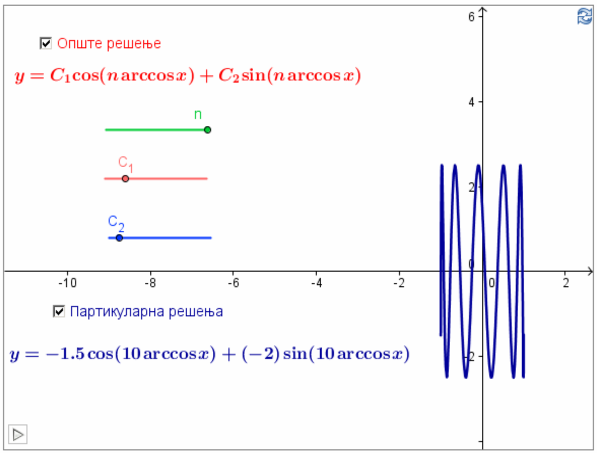
$$y(t) = C_1 \cos(nt) + C_2 \sin(nt)$$

односно, када вратимо смену $t = \arccos x$ добијамо опште решење диференцијалне једначине Чебишева

$$y(x) = C_1 \cos(n \arccos x) + C_2 \sin(n \arccos x).$$



Слика 3.8. *Почетак анимације решења једначине Чебишева*



Слика 3.9. *Анимација решења једначине Чебишева*

3.3.3 Беселова диференцијална једначина

Дефиниција 3.9. *Једначина*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$$

се зове **Беселова** [7] **диференцијална једначина реда** $\nu = \frac{1}{2}$.

Сада ћемо размотрити питање налажења решења Беселове једначине.
Ако се уведе нова непозната функција $z = z(x)$ са

$$y(x) = \frac{z(x)}{\sqrt{x}},$$

тада се дата диференцијална једначина своди на диференцијалну једначину са константним коефицијентима.
Када израчунамо y' и y'' :

$$y' = \frac{2xz' - z}{2x\sqrt{x}},$$

$$y'' = \frac{4x^2\sqrt{x}z'' - 4x\sqrt{x}z' + 3z\sqrt{x}}{4x^3}$$

и заменимо у полазну једначину, након сређивања, добијамо линеарну диференцијалну једначину са константним коефицијентима

$$z'' + z = 0.$$

Карактеристична једначина добијене диференцијалне једначине је

$$r^2 + 1 = 0,$$

па су карактеристични корени $r_1 = i$ и $r_2 = -i$.
Опште решење ове једначине је

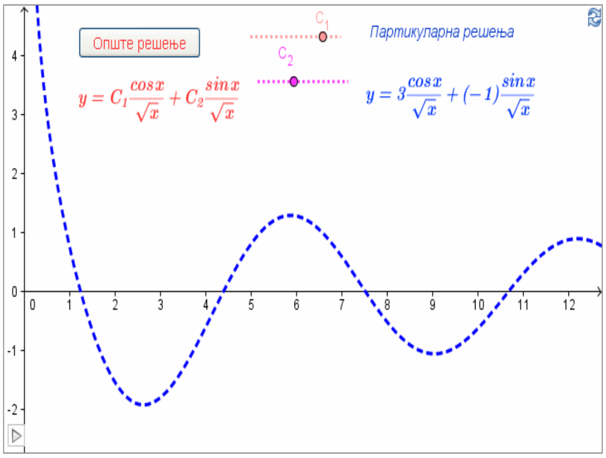
$$z(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

[7] Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), немачки математичар и астроном

Када вратимо смену $z(x) = y(x) \cdot \sqrt{x}$ добијамо *опште решење Беселове диференцијалне једначине реда* $\nu = \dfrac{1}{2}$

$$y(x) = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}},$$

где су C_1, C_2 произвољне константе.



Слика 3.10. *Графички приказ решења Беселове једначине*

4 Решавање диференцијалних једначина помоћу редова

У неким случајевима, а нарочито када се диференцијална једначина не може решити помоћу коначног броја интеграција, решење се тражи у облику степеног реда под одређеним условима.

Пре представљања решења диференцијалне једначине у облику степеног реда, увешћемо појам аналитичке функције, као и регуларне и сингуларне тачке диференцијалне једначине.

Дефиниција 4.1. *За функцију $f(x)$ кажемо да је* **аналитичкафункција** *у тачки x_0 ако се у околини тачке x_0 може представити конвергентним степеним редом*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0)(x - x_0)^n.$$

Бројеве $a_n(x_0)$ називамо коефицијентима тог реда.

Једна од битних карактеристика сваког степеног реда је његов радијус конвергенције. То је број R који се рачуна на један од следећа два начина:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n(x_0)}{a_{n+1}(x_0)} \right| \qquad \text{или} \qquad R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x_0)|}.$$

Ред $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0)(x - x_0)^n$ конвергира у области $|x - x_0| < R$.

Од посебног интереса је представљање решења хомогене линеарне диференцијалне једначине у облику степеног реда

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0.$$

Дефиниција 4.2. *Тачка x_0 је* **регуларна тачка** *једначине*

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

ако су функције $p_1(x)$ и $p_2(x)$ аналитичке у тој тачки.
Тачка x_0 је **сингуларна тачка** *ако бар једна од функција $p_1(x)$ и $p_2(x)$ није аналитичка у тој тачки.*

Теорема 4.1. *Ако су коефицијенти $p_1(x)$ и $p_2(x)$ једначине*

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

аналитичке функције у области $|x - x_0| < R$, тада је свако решење $y(x)$ дате једначине аналитичка функција у области $|x - x_0| < R$, односно, може се представити степеним редом

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

који конвергира у области $|x - x_0| < R$.

За решавање диференцијалне једначине $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ помоћу степених редова користи се **метода неодређених коефицијената**, што ћемо видети на следећем примеру.

Пример 23. *Одредити решење диференцијалне једначине*

$$y'' - x^2 y = 0$$

у облику степеног реда у околини тачке $x_0 = 0$.

Решење:

Дата једначина је хомогена линеарна једначина другог реда где су $p_1(x) = 0$ и $p_2(x) = -x^2$ аналитичке функције на $\mathbf{R}$, па на основу теореме 4.1. следи и да је решење аналитичка функција на $\mathbf{R}$, односно да се може написати у облику степеног реда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Диференцирањем $y(x)$ два пута члан по члан и заменом у дату једначину добијамо

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Извршићемо померање индекса тако да нам и прва сума креће од нуле

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0.$$

Сада је идеја да и у првој суми наместимо да буде x^{n+2}, па зато померамо индекс у првој суми да креће од $n = -2$.

$$\sum_{n=-2}^{\infty} (n+4)(n+3)a_{n+4}x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

Ако из прве суме издвојимо чланове за $n = -2$ и $n = -1$, можемо све да спојимо под једну суму

$$y(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=0}^{\infty}[(n+4)(n+3)a_{n+4} - a_n]x^n \equiv 0.$$

Изједначавајући коефицијенте уз исте степене промењљиве x са леве и десне стране последње једнакости добијамо

$$\begin{aligned}
&a_2 = 0\\
&a_3 = 0\\
&(n+4)(n+3)a_{n+4} - a_n = 0 \;\Leftrightarrow\; a_{n+4} = \frac{a_n}{(n+4)(n+3)},
\end{aligned}$$

Мењајући вредности за $n = 0, 1, \ldots$ у последњу једнакост добијамо

$$n = 0: \quad a_4 = \frac{a_0}{4 \cdot 3}$$

$$n = 4: \quad a_8 = \frac{a_4}{8 \cdot 7} = \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7}$$

$$\vdots$$

$$n = 4k: \quad a_{4k} = \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 \ldots 4k \cdot (4k-1)},\ k = 1, 2, \ldots$$

$$n = 1: \quad a_5 = \frac{a_1}{5 \cdot 4}$$

$$n = 5: \quad a_9 = \frac{a_5}{9 \cdot 8} = \frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 8}$$

$$\vdots$$

$$n = 4k+1: \quad a_{4k+1} = \frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 8 \ldots (4k+1) \cdot 4k},\ k = 1, 2, \ldots$$

$$n = 2: \quad a_6 = \frac{a_2}{6 \cdot 5} = 0$$

$$n = 6: \quad a_{10} = \frac{a_6}{10 \cdot 9} = 0$$

$$\vdots$$

$$n = 4k+2: \quad a_{4k+2} = 0,\ k = 1, 2, \ldots$$

$$n = 3: \quad a_7 = \frac{a_3}{7 \cdot 6} = 0$$

$$n = 7: \quad a_{11} = \frac{a_7}{11 \cdot 10} = 0$$

$$\vdots$$

$$n = 4k+3: \quad a_{4k+3} = 0,\ k = 1, 2, \ldots$$

Дакле, опште решење дате једначине у облику степеног реда је

$$y(x) = a_0 + a_1(x) + a_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k}}{4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 \ldots 4k \cdot (4k-1)} +$$

$$+ a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 8 \ldots (4k+1) \cdot 4k},$$

где су a_0 и a_1 произвољне константе.

Решавање диференцијалне једначине помоћу степених редова може се применити и на неке случајеве када коефицијенти једначине нису аналитичке функције.

Дефиниција 4.3. *Сингуларну тачку x_0 једначине*

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

називамо **регуларно сингуларном тачком** *ако су функције*

$$q_1(x) = (x - x_0)p_1(x) \quad \text{и} \quad q_2(x) = (x - x_0)^2 p_2(x)$$

аналитичке функције у тачки x_0.

Ако једначину $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ помножимо са $(x - x_0)^2$, при чему је x_0 њена регуларно сингуларна тачка, добијамо

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)^2 p_1(x)y' + (x - x_0)^2 p_2(x)y = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)q_1(x)y' + q_2(x)y = 0 \quad / \ : (x - x_0)^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y'' + \tfrac{q_1(x)}{x-x_0}y' + \tfrac{q_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0.$$

Тада постоји решење добијене једначине у облику реда

$$y(x) = (x - x_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

који конвергира у области $|x - x_0| < R$. У овом реду ћемо претпоставити да је $a_0 \neq 0$, док се бројеви m и $a_n,\ n = 1, 2, \ldots$ одређују тако да функција $y(x)$ задовољава полазну једначину.

Пример 24. *У близини координатног почетка одредити решење диференцијалне једначине*

$$2(x^2 + x^3)y'' - (x - 3x^2)y' + y = 0$$

у облику степеног реда.

Решење:

Дату једначину можемо записати у облику

$$y'' - \frac{1 - 3x}{2x(1 + x)}y' + \frac{1}{2x^2(1 + x)}y = 0.$$

Функције

$$p_1(x) = -\frac{1 - 3x}{2x(1 + x)} \quad \text{и} \quad p_2(x) = \frac{1}{2x^2(1 + x)}$$

нису аналитичке у тачки $x_0 = 0$, па је $x_0 = 0$ сингуларна тачка. Посматрајмо функције

$$q_1(x) = -\frac{1 - 3x}{2(1 + x)} \quad \text{и} \quad q_2(x) = \frac{1}{2(1 + x)}.$$

Оне су аналитичке у тачки $x_0 = 0$, па следи да је $x_0 = 0$ регуларно сингуларна тачка. Функције $q_1(x)$ и $q_2(x)$ су аналитичке у области $|x| < 1$. Дакле, опште решење тражимо у облику

$$y(x) = x^m \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Диференцирањем функције $y(x)$ члан по члан и заменом y, y' и y'' у дату једначину добијамо

$$2(x^2 + x^3) \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1) a_n x^{m+n-2} -$$

$$-(x - 3x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (m+n) a_n x^{m+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n} = 0,$$

односно

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1) a_n x^{m+n} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1) a_n x^{m+n+1} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} (m+n) a_n x^{m+n} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (m+n) a_n x^{m+n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n} = 0.$$

Сада хоћемо да нам све суме садрже x^{m+n}, па ћемо померати индексе где је то потребно.

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1) a_n x^{m+n} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (m+n-1)(m+n-2) a_{n-1} x^{m+n} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} (m+n) a_n x^{m+n} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} (m+n-1) a_{n-1} x^{m+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n} = 0.$$

Видимо да нам индекси код неких сума крећу од 0, а код неких од 1, тако да ћемо из оних сума које крећу од 0 избацити нулте чланове и онда све ставити под једну суму и након сређивања добијамо

$$(2m^2 - 3m + 1) a_0 x^m +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n-1}(m+n-1)(2m+2n-1) + a_n(m+n-1)(2m+2n-1)] x^{m+n} \equiv 0$$

Изједначавајући коефицијенте уз исте степене променљиве x са леве и десне стране последње једнакости добијамо

$$(2m^2 - 3m + 1) a_0 = 0$$

$$a_{n-1}(m+n-1)(2m+2n-1) + a_n(m+n-1)(2m+2n-1) = 0$$

Како је претпоставка да је $a_0 \neq 0$, то мора бити

$$2m^2 - 3m + 1 = 0,$$

односно

$$m_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$m_1 = 1 \quad \text{или} \quad m_2 = \frac{1}{2}.$$

Из једнакости $a_{n-1}(m+n-1)(2m+2n-1) + a_n(m+n-1)(2m+2n-1) = 0$ следи да је

$$a_n = -a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

односно,

$$a_n = -a_{n-1} = a_{n-2} = -a_{n-3} = \ldots = (-1)^n a_0,$$

где је a_0 произвољна константа.
Тада је

$$y(x, m) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_0 x^n = \frac{a_0 x^m}{1+x}$$

За a_0 и $m_1 = 1$ добијамо једно решење

$$y_1(x) = \frac{x}{1+x}.$$

За $a_0 = 1$ и $m_2 = \frac{1}{2}$ добијамо друго решење

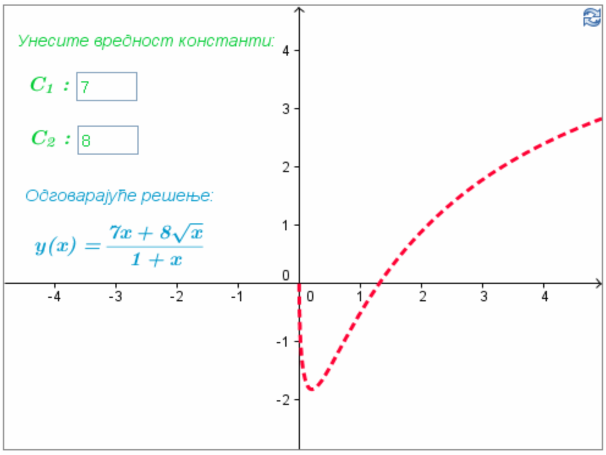
$$y_2(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}.$$

Како су решења y_1 и y_2 линеарно независна, опште решење дате диференцијалне једначине ће бити њихова линеарна комбинација

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

односно

$$y(x) = \frac{C_1 x + C_2\sqrt{x}}{1+x}, \; C_1, \, C_2 \in \mathbf{R}.$$



Слика 4.1. *Илустрација решења диференцијалне једначине за вредности константи C_1 и C_2 које се уносе у одговарајућа поља*

5 Лапласове трансформације

До сада смо видели неколико метода за решавање диференцијалних једначина. Овде ћемо видети на који начин се дата диференцијална једначина може трансформисати у одговарајућу алгебарску једначину која се решава познатим алгебарским методама.
Лапласова трансформација је једна од најзначајнијих трансформација која преводи одређене диференцијалне једначине у алгебарске.
Добила је име у част Пјер-Симон Лапласа[8], француског математичара, који је ову трансформацију користио у свом раду о теорији вероватноће, а саму трансформацију је заправо открио Леонард Ојлер, швајцарски математичар из XVIII века.

Слика 5.1. *Лаплас (лево) и Ојлер (десно)*

[8] Pierre-Simon, Marquis de Laplace (1749-1827), француски математичар и астроном

5.1 Дефиниција и основне особине

Дефиниција 5.1. *Нека је функција $f(t)$ интеграбилна за све вредности $t \in [0, \infty)$. Релација*

$$L[f(t)](s) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

при чему је

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \to \infty} \int_0^{T} e^{-st} f(t) dt,$$

дефинише нову функцију $F(s)$ реалне или комплексне променљиве s и представља Лапласову трансформацију функције $f(t)$.

Функција f се назива *оригинал*, а функција F, која зависи од променљиве s, назива се *слика* или Лапласова трансформација оригинала f.

Следећа теорема даје *довољне услове* за постојање Лапласове трансформације функције f.

Теорема 5.1. *Ако функција $f \colon [0, \infty) \to \mathbf{R}$ задовољава следећа два услова:*

1. *функција f је непрекидна на својој области дефинисаности*
2. *функција f је највише експоненцијалног раста, тј. постоје константе M, a и t_0 са својством*

$$|f(t)| \leq M\, e^{at}, \quad \text{за} \quad t \leq t_0$$

тада интеграл

$$L[f(t)](s) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

постоји и апсолутно конвергира за $s > a$.

Доказ: Како је функција $f(t)$ непрекидна на својој области дефинисаности, а функција e^{-st} је интеграбилна за сваки коначан интервал на t оси и из $|f(t)| \leq M\, e^{at}$ следи да је:

$$|L[(f(t)](s)| = \left| \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-st} M e^{at} dt,$$

односно

$$|L[(f(t)](s)| = M \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{M}{s-a}, \quad s > a,$$

а то значи да постоји функција $F(s) = L[f(t)](s)$, односно, да постоји Лапласова трансформација за f када је $s > a$.

Биће нам важан инфимум (највеће доње ограничење) свих бројева a из претходне неједнакости, који се назива *апсциса конвергенције.*

За дату функцију f обележимо инфимум са σ_f.
Ако је број s мањи од σ_f, тада интеграл помоћу кога смо дефинисали Лапласову трансформацију не постоји, а за $s > \sigma_f$, тај интеграл апсолутно

конвергира.

Такође, особина слике, односно функције F, је да важи

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0,$$

па је то *потребан услов* да би једна функција $F(s)$ била слика, односно Лапласова трансформација неке функције.

Основна својства Лапласове трансформације

На основу особина интеграла, непосредно следи да је Лапласова трансформација збира две функције збир њихових Лапласових трансформација:

$$L[f_1(t)+f_2(t)](s) = \int_0^\infty (f_1(t)+f_2(t))e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}f_1(t)dt + \int_0^\infty e^{-st}f_2(t)dt,$$

$$L[f_1(t)+f_2(t)](s) = L[f_1(t)](s) + L[f_2(t)](s).$$

при чему функције f_1 и f_2 задовољавају теорему 5.1.
Такође, Лапласова трансформација функције $cf(t)$, где је c произвољна константа, је:

$$L[cf(t)](s) = \int_0^\infty cf(t)e^{-st}dt = c\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = cL[f(t)](s).$$

Дакле, Лапласова трансформација је линеарна, односно дефинише један линеарни оператор у простору функција.

Да бисмо показали још једну важну особину Лапласове трансформације, претпоставимо да функција f има непрекидан први извод који је највише експоненцијалног раста, односно за функцију f' важе услови теореме 5.1. Тада се за $s > a$ парцијалном интеграцијом добија:

$$\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = \left\{ u = e^{-st},\ du = -se^{-st};\ dv = f'(t)dt,\ v = f(t) \right\}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt,$$

односно

$$L[f'(t)](s) = sL[f(t)](s) - f(0).$$

Ова особина се може уопштити тако да за $n \in \mathbf{N}$ важи:

$$L[f^{(n)}(t)](s) = s^nL[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

при чему се претпоставља да n-ти извод функције f задовољава услове теореме 5.1.

Наведимо још неке *особине Лапласове трансформације*:

1. $L[e^{bt}f(t)](s) = L[f(t)](s-b)$ за $\in \mathbf{R}$;
2. $L[f(kt)](s) = \dfrac{1}{k}L[f(t)]\Big(\dfrac{s}{k}\Big)$ за $k > 0$;

3. $L\left[\displaystyle\int_0^t f(u)du\right](s) = \dfrac{1}{s}L[f(t)](s);$

4. $L[t^n f(t)](s) = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}(L[f(t)])(s)$ за $n \in \mathbf{N}$,

при чему се претпоставља да функција f задовољава услове теореме 5.1.

Доказ:

1. Како је $F(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$, заменимо s са $s-b$, где је b константа. Тада је
$$L[f(t)](s-b) = F(s-b) = \int_0^\infty e^{-(s-b)t} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{bt} f(t)dt$$
$$L[f(t)](s-b) = L[e^{bt} f(t)](s)$$

2. Треба доказати да је $L[f(kt)](s) = \dfrac{1}{k}F\Big(\dfrac{s}{k}\Big)$.
По дефиницији Лапласове трансформације је
$$L[f(kt)](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(kt)dt = \Big\{kt = u, \quad kdt = du\Big\}$$
$$L[f(kt)](s) = \frac{1}{k}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{k}u} f(u)du = \frac{1}{k}F\Big(\frac{s}{k}\Big)$$

3. Доказујемо да је $L\Big[\displaystyle\int_0^t f(u)du\Big](s) = \dfrac{F(s)}{s}$.
$$L\left[\int_0^t f(u)du\right](s) = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)du\right) e^{-st} dt$$
$$L\left[\int_0^t f(u)du\right](s) = -\frac{e^{-st}}{s}\int_0^t f(u)du\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$
$$L\left[\int_0^t f(u)du\right](s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \frac{1}{s}L[f(t)](s) = \frac{F(s)}{s}$$

4. Доказујемо да је $L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$. Како је
$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt,$$
диференцирањем ове једнакости n пута по s добијамо
$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t) e^{-st} dt$$
С друге стране, имамо да је
$$L[t^n f(t)] = \int_0^\infty t^n f(t) e^{-st} dt,$$
па следи да је
$$L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

5.2 Лапласова трансформација неких функција

Следећи примери илуструју налажење Лапласове трансформације неких функција.

Пример 25. *Наћи Лапласову трансформацију фунцкије $f(t) = t^{\,a}$, где је a произвољна константа.*

Решење:

Да бисмо одредили Лапласову трансформацију подсетимо се гама функције Γ која се дефинише интегралом

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{\,y-1} e^{\,-y} dy, \quad (Re(y) > 0)$$

Одредимо $\Gamma(a+1)$ за $a > -1$:

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty y^{\,a} e^{\,-y} dy.$$

Ако ставимо да је $y = st$, $dy = sdt$, тада је

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty s^{\,a+1} t^a e^{\,-st} dt \quad \Rightarrow \quad \frac{\Gamma(a+1)}{s^{\,a+1}} = \int_0^\infty t^a e^{\,-st} dt$$

Како је, по дефиницији,

$$L[t^a](s) = \int_0^\infty t^a e^{\,-st} dt$$

доказали смо да је

$$L[t^a](s) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{\,a+1}}, \quad a > -1, \quad s > 0.$$

Специјално, ако је $a = n$ ($n \in \mathbf{N}$) имамо

$$L[t^n](s) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{\,n+1}} = \frac{n!}{s^{\,n+1}},$$

одакле за $n = 0$ добијамо

$$L[1](s) = \frac{1}{s}.$$

Пример 26. *Наћи Лапласову трансформацију од $f(t) = e^{\,t}$ и $f(t) = e^{\,at}$.*

Решење:

Лапласова трансформација експоненцијалних функција се налази директно по дефиницији

$$L[e^{\,t}](s) = \int_0^\infty e^{\,t} \cdot e^{\,-st} dt = \int_0^\infty e^{\,(1-s)t} dt = -\frac{1}{1-s} e^{\,(1-s)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-1}, \quad s > 1$$

Користећи особину $L[f(kt)](s) = \dfrac{1}{k} L[f(t)]\Big(\dfrac{s}{k}\Big)$ за $k > 0$, добијамо да је

$$L[e^{\,at}](s) = \frac{1}{a} L[e^t]\Big(\frac{s}{a}\Big) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{s}{a} - 1} \quad \Leftrightarrow \quad L[e^{\,at}](s) = \frac{1}{s-a}.$$

Пример 27. *Одредити Лапласове трансформације:*

$L[4e^{-2t}](s)$ *и* $L[(3-6t)e^{-2t}](s)$.

Решење:

Користећи линеарност Лапласове трансформације и резултат из претходног примера да је

$$L[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a},$$

добијамо Лапласове трансформације датих функција:

$$L[4e^{-2t}](s) = 4L[e^{-2t}](s) = \frac{4}{s+2}.$$

У овом примеру ћемо користити још и следећу особину Лапласове трансформације $L[e^{bt}f(t)](s) = L[f(t)](s-b)$.
Тада је

$$L[(3-6t)e^{-2t}](s) = 3L[e^{-2t}](s) - 6L[te^{-2t}](s) = \frac{3}{s+2} - 6L[t](s+2)$$

Израчунајмо Лапласову трансформацију функције $L[t](s+2)$:

$$L[t](s+2) = \int_0^\infty te^{-(s+2)t}dt = \left\{ u=t,\ du=dt;\quad dv = e^{-(s+2)t}dt,\ v = -\frac{1}{s+2}e^{-(s+2)t} \right\}$$

$$L[t](s+2) = -\frac{t}{s+2}e^{-(s+2)t}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s+2}\int_0^\infty e^{-(s+2)t}dt = -\frac{1}{(s+2)^2}e^{-(s+2)t}\Big|_0^\infty$$

$$L[t](s+2) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

Коначно добијамо да је

$$L[(3-6t)e^{-2t}](s) = \frac{3}{s+2} - \frac{6}{(s+2)^2} = \frac{3s+6-6}{(s+2)^2} = \frac{3s}{(s+2)^2}.$$

Неке најважније Лапласове трансформације

1. $f(t) = 1\,,\quad F(s) = \frac{1}{s}\,,\quad (Re(s) > 0)$

2. $f(t) = t^k\,,\quad F(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}\,,\quad (Re(s) > 0 \wedge k > -1 \wedge k \in \mathbf{Z})$

3. $f(t) = e^{at}\,,\quad F(s) = \frac{1}{s-a}\,,\quad (Re(s-a) > 0 \wedge a \in \mathbf{C})$

4. $f(t) = t^k e^{at}\quad F(s) = \frac{k!}{(s-a)^{k+1}}\,, (Re(s-a) > 0 \wedge a \in \mathbf{C} \wedge k > -1 \wedge k \in \mathbf{C})$

5. $f(t) = \sin\omega t\,,\quad F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\,,\quad (Re(s) > |Im(a)|)$

6. $f(t) = \cos\omega t\,,\quad F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,,\quad (Re(s) > |Im(a)|)$

7. $f(t) = \sinh at\,, \quad F(s) = \dfrac{a}{s^2 - a^2}\,, \quad (Re(s) > |Re(a)|)$

8. $f(t) = \cosh at\,, \quad F(s) = \dfrac{s}{s^2 - a^2}\,, \quad (Re(s) > |Re(a)|)$

9. $f(t) = t \sin \omega t\,, \quad F(s) = \dfrac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}\,, \quad (Re(s) > |Im(\omega)|)$

10. $f(t) = t \cos \omega t\,, \quad F(s) = \dfrac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}\,, \quad (Re(s) > |Im(\omega)|)$

11. $f(t) = e^{at} \sin \omega t\,, \quad F(s) = \dfrac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}\,, \quad (Re(s-a) > |Im(\omega)|)$

12. $f(t) = e^{at} \cos \omega t\,, \quad F(s) = \dfrac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}\,, \quad (Re(s-a)s > |Im(\omega)|)$

5.3 Инверзна Лапласова трансформација

Видели смо како се за дати оригинал $f(t)$ одређује његова Лапласова трансформација $F(s)$.
Сада се поставља питање налажења оригинала $f(t)$, $t \geq 0$, за дату слику $F(s)$, односно *инверзне Лапласове трансформације* функције F.

Инверзну Лапласову трансформацију функције F ћемо обележити са $L^{-1}[F(s)]$, ако постоји функција f таква да је

$$f(t) = L^{-1}[F(s)](t), \quad \text{за све} \quad t \geq 0.$$

Ако је функција f непрекидна на $[0, \infty)$, тада је она и једина непрекидна фунцкија са том особином.

Одређивање оригинала $f(t)$ за дату слику $F(s)$ је доста компликовано у општем случају, али се у неким случајевима комбинацијом раније израчунатих Лапласових трансформација може наћи оригинал f за дату функцију F. Често се користи и следећа формула:

$$L^{-1}\left[\frac{Ks + L}{(s^2 + \alpha^2)^2}\right](t) = -\frac{L}{2\alpha^2} t \cos(\alpha t) + \frac{K}{2\alpha} t \sin(\alpha t) + \frac{L}{2\alpha^3} \sin(\alpha t)$$

за $s > 0$ и $\alpha > 0$, док су K и L произвољне константе.

Неке најважније инверзне Лапласове трансформације

1. $F(s) = \dfrac{1}{s^{k+1}}\,, \quad f(t) = k!t^k\,, \quad (Re(s) > 0 \wedge k > -1 \wedge k \in \mathbf{Z})$

2. $F(s) = \dfrac{1}{s-a}\,, \quad f(t) = e^{at}\,, \quad (Re(s-a) > 0)$

3. $F(s) = \dfrac{1}{(s-a)^n}\,, \quad f(t) = \dfrac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}\,, \quad (Re(s-a) > 0,\ n \in \mathbf{N})$

4. $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + a^2}\,, \quad f(t) = \dfrac{\sin(at)}{a}\,, \quad (Re(s) > |Im(a)|)$

5. $F(s) = \dfrac{s}{s^2+a^2}\,, \quad f(t) = \cos(at)\,, \quad (Re(s > |Im(a)|)$

6. $F(s) = \dfrac{1}{(s+a)(s+b)}\,, \quad f(t) = \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}\,,$
$(a \neq b \wedge Re(s+a) > 0 \wedge Re(s+b) > 0)$

7. $F(s) = \dfrac{s}{(s+a)(s+b)}\,, \quad f(t) = \dfrac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b}\,,$
$(a \neq b \wedge Re(s+a) > 0 \wedge Re(s+b) > 0)$

8. $F(s) = \dfrac{e^{-ps}}{s^2+a^2}\,, \quad f(t) = \sin(at - p)\,, \quad (p > 0 \wedge Re(s) > |Im(a)|)$

9. $F(s) = \dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}\,, \quad f(t) = t\sin\omega t\,, \quad (Re(s) > |Im(\omega)|)$

10. $F(s) = \dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\,, \quad f(t) = t\cos\omega t\,, \quad (Re(s) > |Im(\omega)|)$

Пример 28. *Наћи инверзну Лапласову трансформацију од* $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$.

Решење:

Дату функцију $F(s)$ можемо записати у облику

$$F(s) = \frac{1+s^2-s^2}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}.$$

Користећи особину линеарности Лапласове трансформације биће

$$f(t) = L^{-1}[F(s)](t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right](t) - L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t)$$

На основу табеле инверзних Лапласових трансформација добијамо

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right](t) = t\;, \qquad L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t) = \sin t.$$

Дакле, инверзна Лапласова трансформација функције F је

$$f(t) = t - \sin t$$

Пример 29. *Наћи инверзну Лапласову трансформацију од* $F(s) = \dfrac{s}{s^2+2s+5}$.

Решење:

Како је $s^2 + 2s + 5 = s^2 + 2s + 1 + 4 = (s+1)^2 + 4$, то функцију $F(s)$ пишемо као

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1-1}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} - \frac{1}{(s+1)^2+4}.$$

Из особине Лапласове трансформације
$$L[e^{bt}f(t)](s) = L[f(t)](s-b)$$
имаћемо
$$L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right](t) = e^{-t}\cos 2t$$
$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+4}\right](t) = e^{-t}\frac{\sin 2t}{t}.$$
Дакле, инверзна Лапласова трансформација функције F је
$$f(t) = L^{-1}[F(s)](t) = L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right](t) - L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+4}\right](t),$$
односно, коришћењем табеле инверзних Лапласових трансформација,
$$f(t) = e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t.$$

5.4 Примена на диференцијалне једначине

Посматрајмо линеарну диференцијалну једначину са константним коефицијентима
$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = f(t).$$
Применом Лапласове трансформације ова једначина се може свести на обичну алгебарску једначину и тиме упростити њено решавање.
Израчунајмо Лапласове трансформације извода функције y : y', y'', $y'''\ldots$
За први извод ћемо поћи директно од дефиниције Лапласове трансформације
$$L[y'(t)](s) = \int_0^\infty y'(t)e^{-st}dt = \left\{u = e^{-st},\ du = -se^{-st};\quad dv = y'(t)dt,\ v = y(t);\right\}$$
$$L[y'(t)](s) = y(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt$$
Дакле,
$$L[y'(t)](s) = -y(0) + sL[y(t)](s) = sY - y(0).$$
Да бисмо одредили $L[y''(t)](s)$, посматрајмо y'' као први извод функције y'.
Тада је
$$L[y''(t)](s) = sL[y'(t)] - y'(0) = s^2Y - sy(0) - y'(0).$$
На овај начин можемо добити Лапласову трансформацију за функцију $y^{(n)}(t)$:
$$L[y^{(n)}(t)](s) = p^nY - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y'(0) - \ldots - p^1y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$
$$L[y^{(n)}(t)](s) = p^nY - \sum_{i=1}^{n} p^{n-i}y^{(i-1)}(0)$$

На следећим примерима ћемо показати примену Лапласове трансформације на диференцијалне једначине. Већина примера се заснива на [1] и [5].

Пример 30. *Решити почетни проблем*

$$y'' + y' - 2y = -4,$$
$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

Решење:

Претпоставимо да решење $y = y(t)$ има Лапласову трансформацију

$$Y(s) = L[y(t)](s) \quad \text{за} \quad s > a.$$

Када урадимо Лапласову трансформацију леве и десне стране једначине имаћемо

$$L[y''(t)](s) + L[y'(t)](s) - 2L[y(t)](s) = L[4](s)$$

где је

$$L[y'(t)](s) = \int_0^\infty y'(t)e^{-st}dt = \left\{ u = e^{-st},\ du = -se^{-st}; \quad dv = y'(t)dt,\ v = y(t); \right\}$$

$$L[y'(t)](s) = y(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt = -y(0) + sL[y(t)](s).$$

Из почетног услова $y(0) = 2$ следи да је

$$L[y'(t)](s) = sL[y(t)](s) - y(0) = sY(s) - 2.$$

Да бисмо одредили $L[y''(t)](s)$, посматрајмо y'' као први извод функције y'. Тада је

$$L[y''(t)](s) = sL[y'(t)] - y'(0) = s(sY(s) - 2) - 3 = s^2Y(s) - 2s - 3.$$

Нађимо још Лапласову трансформацију израза на десној страни

$$L[-4](s) = -4L[1](s) = -\frac{4}{s}.$$

Када смо одредили Лапласове трансформације свих чланова полазне једначине, тада се она своди на одговарајућу алгебарску једначину

$$s^2Y(s) - 2s - 3sY(s) - 2 - 2Y(s) = -\frac{4}{s},$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s)(s^2 - 3s - 2) = \frac{2s^2 + 5s - 4}{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{2s^2 + 5s - 4}{s(s^2 - 3s - 2)} = \frac{2s^2 + 5s - 4}{s(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-1}.$$

Сабирањем ова три разломка и изједначавањем одговарајућих коефицијената добијамо

$$A = 2, \quad B = -1, \quad C = 1 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-1}$$

Нађимо сада инверзном Лапласовом трансформацијом тражено решење $y(t)$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)](t) = 2L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) - L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right](t) + L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t).$$

Из инверзних Лапласових трансформација добијамо

$$y(t) = 2 - e^{-2t} + e^t$$

Добијено решење има Лапласову трансформацију чија је апсциса конвергенција $\sigma_y = 1$.

Пример 31. *Решити почетни проблем*

$$\begin{gathered} y'' + 4y = \sin 2t, \\ y(0) = 10, \quad y'(0) = 0. \end{gathered}$$

Решење:

Претпоставимо да решење $y = y(t)$ има Лапласову трансформацију

$$Y(s) = L[y(t)](s) \quad \text{за} \quad s > a.$$

Када урадимо Лапласову трансформацију леве и десне стране једначине имаћемо

$$L[y''(t)](s) + 4L[y(t)](s) = L[\sin 2t](s)$$

где је

$$L[y'(t)](s) = \int_0^\infty y'(t)e^{-st}dt = \left\{u = e^{-st},\ du = -se^{-st}; \quad dv = y'(t)dt,\ v = y(t);\right\}$$

$$L[y'(t)](s) = y(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt = -y(0) + sL[y(t)](s).$$

Из почетног услова $y(0) = 10$ следи да је

$$L[y'(t)](s) = sL[y(t)](s) - y(0) = sY(s) - 10.$$

Да бисмо одредили $L[y''(t)](s)$, посматрајмо y'' као први извод функције y'. Тада је

$$L[y''(t)](s) = sL[y'(t)] - y'(0) = s(sY(s) - 10) - 0 = s^2Y(s) - 10s.$$

Нађимо још Лапласову трансформацију израза на десној страни

$$L[\sin 2t](s) = \frac{2}{s^2+4}.$$

Када смо одредили Лапласове трансформације свих чланова полазне једначине, тада се она своди на одговарајућу алгебарску једначину

$$s^2Y(s) - 10s + 4Y(s) = \frac{2}{s^2+4},$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s)(s^2+4) = \frac{2}{s^2+4} + 10s$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{2}{(s^2+4)^2} + \frac{10s}{s^2+4}.$$

Нађимо сада инверзном Лапласовом трансформацијом тражено решење $y(t)$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)](t) = L^{-1}\left[\frac{2}{(s^2+4)^2}\right](t) + L^{-1}\left[\frac{10s}{s^2+4}\right](t).$$

Из инверзних Лапласових трансформација добијамо

$$L^{-1}\left[\frac{10s}{s^2+4}\right](t) = 10\cos 2t,$$

$$L^{-1}\left[\frac{2}{(s^2+4)^2}\right](t) = L^{-1}\left[\frac{1}{8}\frac{16}{(s^2+4)^2}\right](t) = \frac{1}{8}L^{-1}\left[\frac{2(s^2+4)-2s^2+8}{(s^2+4)^2}\right](t) =$$

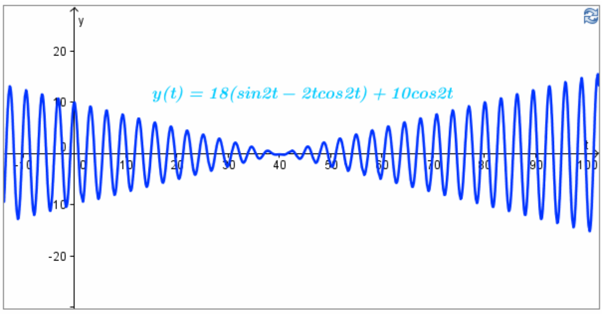
$$= \frac{1}{8}L^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right](t) - \frac{1}{8}L^{-1}\left[\frac{2(s^2-4)}{(s^2+4)^2}\right](t)$$

$$L^{-1}\left[\frac{2}{(s^2+4)^2}\right](t) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin 2t}{2} - \frac{1}{8}\cdot 2t\cos 2t = \frac{1}{8}(\sin 2t - 2t\cos 2t).$$

Дакле, тражено решење које задовољава дате почетне услове је

$$y(t) = \frac{1}{8}(\sin 2t - 2t\cos 2t) + 10\cos 2t.$$

Добијено решење има Лапласову трансформацију чија је апсциса конвергенција $\sigma_y = 1$.



Слика 5.2. *Графички приказ решења дате једначине*

5.5 Примена на системе диференцијалних једначина

Лапласова трансформација је веома погодна за системе диференцијалних једначина јер их своди на систем обичних једначина.

На следећим примерима ћемо показати на који начин се помоћу Лапласове трансформације решава систем диференцијалних једначина. Већина примера се заснива на [1] и [5].

Пример 32. *Решити систем диференцијалних једначина:*

$$\begin{aligned} y' - 2y + z &= 0 \\ z' - y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

уз почетне услове $y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

Решење:

Претпоставимо да решења $y = y(t)$ и $z = z(t)$ имају Лапласову трансформацију на некој полуправој $s > a$:

$$Y(s) = L[y(t)](s) \quad \text{и} \quad Z(s) = L[z(t)](s).$$

Када урадимо Лапласову трансформацију обе једначине имаћемо

$$L[y'(t)](s) - 2L[y(t)](s) + L[z(t)](s) = 0$$

$$L[z'(t)](s) - L[y(t)](s) - 2L[z(t)](s) = 0,$$

где је

$$L[y'(t)](s) = \int_0^\infty y'(t)e^{-st}dt$$

$$= \left\{ u = e^{-st},\ du = -se^{-st}; \quad dv = y'(t)dt,\ v = y(t); \right\}$$

$$L[y'(t)](s) = y(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt = -y(0) + sL[y(t)](s).$$

Из почетног услова $y(0) = 1$ следи да је

$$L[y'(t)](s) = sL[y(t)](s) - y(0) = sY - 1.$$

На исти начин добијамо да је

$$L[z'(t)](s) = sL[z(t)](s) - z(0) = sZ.$$

Када смо одредили Лапласове трансформације система, тада се он своди на одговарајући систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{aligned} sY - 1 - 2Y + Z &= 0 \\ sZ - Y - 2Z &= 0. \end{aligned}$$

Из прве једначине новог система добијамо да је $Z = 1 - (s-2)Y$.
Када то заменимо у другу једначину, након сређивања имаћемо

$$Y = \frac{s-2}{(s-2)^2+1} \quad \Rightarrow \quad Z = 1-(s-2)\cdot\frac{s-2}{(s-2)^2+1} = \frac{1}{(s-2)^2+1}$$

Применом инверзне Лапласове трансформације добијамо, из табеле инверзних Лапласових трансформација,

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)](t) = L^{-1}\left[\tfrac{s-2}{(s-2)^2+1}\right](t) = e^{2t}\cos t$$

$$z(t) = L^{-1}[Z(s)](t) = L^{-1}\left[\tfrac{1}{(s-2)^2+1}\right](t) = e^{2t}\sin t.$$

Дакле, тражено решење које задовољава почетне услове је

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{2t}\cos t \\ z(t) &= e^{2t}\sin t. \end{aligned}$$

Пример 33. *Решити систем диференцијалних једначина:*

$$\begin{aligned} x'' &= 3(y-x+z) \\ y'' &= x-y \\ z'' &= z \end{aligned}$$

уз почетне услове $x(0) = x'(0) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$ *и* $z(0) = z'(0) = 0$.

Решење:

Претпоставимо да решења $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$ имају Лапласову трансформацију на некој полуправој $s > a$:

$$X(s) = L[x(t)](s), \quad Y(s) = L[y(t)](s) \quad \text{и} \quad Z(s) = L[z(t)](s).$$

Када урадимо Лапласову трансформацију једначина система имаћемо

$$L[x''(t)](s) = 3(L[y(t)](s) - L[x(t)](s) + L[z(t)](s))$$

$$L[y''(t)](s) = L[x(t)](s) - L[y(t)](s)$$

$$L[z''(t)](s) = L[y(t)](s)$$

где је

$$L[x'(t)](s) = \int_0^\infty x'(t)e^{-st}dt$$

$$= \left\{ u = e^{-st},\ du = -se^{-st}; \quad dv = x'(t)dt,\ v = x(t); \right\}$$

$$L[x'(t)](s) = x(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt = -x(0) + sL[x(t)](s).$$

Из почетног услова $x(0)=0$ следи да је

$$L[x'(t)](s) = sL[x(t)](s) - x(0) = sY.$$

Да бисмо одредили $L[x''(t)](s)$, посматрајмо x'' као први извод функције x'. Тада је

$$L[x''(t)](s) = sL[x'(t)] - x'(0) = s^2X.$$

На исти начин добијамо да је

$$L[y'(t)](s) = sL[y(t)](s) - y(0) = sY$$

$$L[y''(t)](s) = sL[y'(t)](s) - y'(0) = s^2Y + 2$$

$$L[z'(t)](s) = sL[z(t)](s) - z(0) = sZ$$

$$L[z''(t)](s) = sL[z'(t)](s) - z'(0) = s^2Z$$

Када смо одредили Лапласове трансформације система, тада се он своди на одговарајући систем линеарних алгебарских једначина:

$$s^2X = 3Y - 3X + 3Z$$

$$s^2Y + 2 = X - Y$$

$$s^2Z = Z$$

Из треће једначине новог система добијамо да је $Z(s)=0,\ s>0$, па када заменимо у прве две једначине добијамо

$$s^2X = 3Y - 3X$$

$$s^2Y = X - Y - 2$$

Ако сада помножимо другу једначину са 3 и додамо првој, имаћемо

$$s^2Y = X - Y - 2$$

$$3s^2Y + s^2X = -6 \quad \Rightarrow \quad X = -\frac{6}{s^2} - 3Y$$

Када заменимо X у једначину $s^2Y = X - Y - 2$ добијамо

$$s^2Y = -\frac{6}{s^2} - 4Y - 2 \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{-2(s^2+3)}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

Сабирањем ових разломака и изједначавањем одговарајућих коефицијената добијамо

$$A=0, \quad B=-\frac{3}{2}, \quad C=0, \quad D=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad Y = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+4}.$$

Када смо израчунали Y, заменимо га у једначину $X = -\frac{6}{s^2} - 3Y$. Тада, након сређивања, добијамо да је

$$X = \frac{-6}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4}.$$

Сабирањем ових разломака и изједначавањем одговарајућих коефицијената добијамо

$$A=0,\quad B=\frac{1}{4},\quad C=0,\quad D=-\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad X=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}\right).$$

Применом инверзне Лапласове трансформације добијамо, из табеле инверзних Лапласових трансформација,

$$x(t)=L^{-1}[X(s)](t)=-\frac{6}{4}L^{-1}\Big[\frac{1}{s^2}\Big](t)+\frac{6}{4}L^{-1}\Big[\frac{1}{s^2+4}\Big](t)=-\frac{3}{2}\Big(t-\frac{\sin 2t}{2}\Big)$$

$$x(t)=-\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}\sin 2t$$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)](t)=-\frac{3}{2}L^{-1}\Big[\frac{1}{s^2}\Big](t)-\frac{1}{2}L^{-1}\Big[\frac{1}{s^2+4}\Big](t)$$

$$y(t)=-\frac{3}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t$$

Дакле, тражено решење које задовољава почетне услове је

$$x(t)=-\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}\sin 2t$$

$$y(t)=-\frac{3}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t$$

$$z(t)=0$$

Решење има Лапласову трансформацију чија је апсциса конвергенција $\sigma_x=\sigma_y=0$.

Пример 34. *Решити систем диференцијалних једначина:*

$$\begin{aligned}&y'+z=2\cos t\\&z'-y=1\end{aligned}$$

уз почетне услове $y(0)=-1$, $z(0)=1$.

Решење:

Претпоставимо да решења $y=y(t)$ и $z=z(t)$ имају Лапласову трансформацију на некој полуправој $s>a$:

$$Y(s)=L[y(t)](s)\quad\text{и}\quad Z(s)=L[z(t)](s).$$

Када урадимо Лапласову трансформацију обе једначине имаћемо

$$L[y'(t)](s)+L[z(t)](s)=L[2\cos t](s)$$

$$L[z'(t)](s)-L[y(t)](s)-2L[z(t)](s)=L[1](s),$$

где је

$$L[y'(t)](s) = \int_0^{\infty} y'(t)e^{-st}dt$$

$$= \left\{ u = e^{-st},\ du = -se^{-st};\quad dv = y'(t)dt,\ v = y(t); \right\}$$

$$L[y'(t)](s) = y(t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} y(t)e^{-st}dt = -y(0) + sL[y(t)](s).$$

Из почетног услова $y(0) = -1$ следи да је

$$L[y'(t)](s) = sL[y(t)](s) - y(0) = sY + 1.$$

На исти начин добијамо да је

$$L[z'(t)](s) = sL[z(t)](s) - z(0) = sZ - 1.$$

Одредимо сада Лапласове трансформације функција на десној страни обе једначине. Из табеле Лапласових трансформација имамо да је

$$L[2\cos t](s) = \frac{2s}{s^2+1}$$

$$L[1](s) = \frac{1}{s}$$

Када смо одредили Лапласове трансформације система, тада се он своди на одговарајући систем линеарних алгебарских једначина:

$$sY + 1 + Z = \frac{2s}{s^2+1}$$

$$sZ - 1 - Y = \frac{1}{s}.$$

Из прве једначине новог система добијамо да је $Z = \dfrac{2s}{s^2+1} - 1 - sY$.
Када то заменимо у другу једначину, након сређивања, имаћемо

$$Y = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{s}$$

Применом инверзне Лапласове трансформације добијамо

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)](t) = L^{-1}\Big[\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\Big](t) - L^{-1}\Big[\frac{1}{s}\Big] = t\cos t - 1.$$

Остало нам је да одредимо $z(t)$.
Како је $Z = \dfrac{2s}{s^2+1} - 1 - sY$ када заменимо Y у ту једначину добијамо

$$Z = \frac{2s}{s^2+1} - 1 - s\Big(\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{s}\Big) = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{s(s^2-1)}{(s^2+1)^2}$$

Тада је $z = z(t)$ једнако

$$z(t) = L^{-1}[Z(s)](t) = 2L^{-1}\Big[\frac{s}{s^2+1}\Big](t) - L^{-1}\Big[\frac{s(s^2-1)}{(s^2+1)^2}\Big](t)$$

Из табеле инверзних Лапласових трансформација добијамо

$$2L^{-1}\Big[\frac{s}{s^2+1}\Big](t) = 2\cos t.$$

Како је

$$\frac{s(s^2-1)}{(s^2+1)^2} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{(s^2+1)^2},$$

сабирањем ових разломака и изједначавањем одговарајућих коефицијената добијамо

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -2, \quad D = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{s(s^2-1)}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{2s}{(s^2+1)^2}.$$

Сада је

$$L^{-1}\Big[\frac{s(s^2-1)}{(s^2+1)^2}\Big](t) = L^{-1}\Big[\frac{s}{s^2+1}\Big](t) - L^{-1}\Big[\frac{2s}{(s^2+1)^2}\Big](t) = \cos t - t\sin t.$$

Коначно добијамо решење $z(t)$

$$z(t) = 2\cos t - \cos t + t\sin t = \cos t + t\sin t.$$

Дакле, тражено решење које задовољава почетне услове је

$$\begin{aligned} y(t) &= t\cos t - 1 \\ z(t) &= \cos t + t\sin t \end{aligned}$$

6 Примена обичних диференцијалних једначина

Диференцијалне једначине су са становишта практичне примене једна од најважнијих грана математике.
Појам диференцијалних једначина јавља се при изучавању појава и процеса који се могу описати аналитички са зависношћу између неких параметара и извода.
Имамо да су многи закони физике исказани преко диференцијалних једначина. Поред физике, примена диференцијалних једначина је велика и у техничким наукама. Такође, примењују се и у биологији, хемији, затим и у медицини, фармацији, економији и другим областима.

У наставку рада навешћемо неке примере који илуструју могућности коришћења диференцијалних једначина. У овим примерима је најважније правилно поставити диференцијалну једначину као математички модел за решавање датог проблема из одређене области. Да бисмо то успели неопходно је познавање основних појмова те области који су потребни за решавање датог проблема.

6.1 Примена диференцијалних једначина у аналитичкој геометрији

Наредни примери показују примене диференцијалних једначина приликом решавања неких проблема у аналитичкој геометрији.

Пример 35. *Наћи све криве $y = f(x)$ у равни xOy које имају својство да ма која тангента те криве сече Ox осу у тачки чија је апсциса једнака двострукој апсциси тачке додира увећаној за 1.*

Решење:

Нека је $y = f(x)$ једна од тражених кривих и $A(x, y)$ произвољна тачка на њој.
Нека је t тангента у тачки A и нека је $B(x_1, y_1)$ пресечна тачка те тангенте и осе Ox.
Из услова задатка имамо да за тачку B важи $x_1 = 2x + 1$, $y_1 = 0$.
Једначина тангенте криве $y = f(x)$ која садржи тачке A и B је

$$y_1 - y = f'(x)(x_1 - x),$$

односно

$$-y = y'(x + 1),$$

где је $y' = f'(x)$.
Одавде је

$$y' = -\frac{y}{x + 1},$$

при чему је y непозната функција коју треба одредити.
Из добијене једначине је

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x + 1},$$

односно

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x+1}$$

Добили смо диференцијалну једначину која раздваја промењливе, па након интеграције

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x+1}$$

имамо да је

$$\ln|y| = -(\ln|x+1| + \ln|C_1|), \quad C_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

$$\ln|y| = -\ln|C_1(x+1)|$$

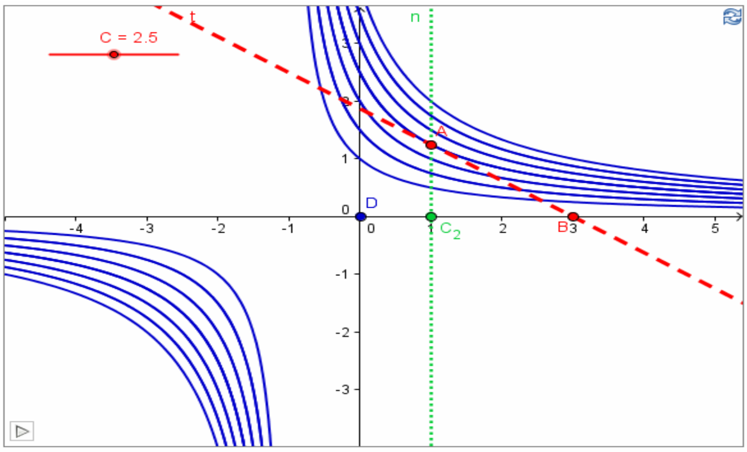
$$y = \pm\frac{1}{C_1(x+1)}.$$

Ако уведемо нову константу $C = \pm\frac{1}{C_1}$ следи да је

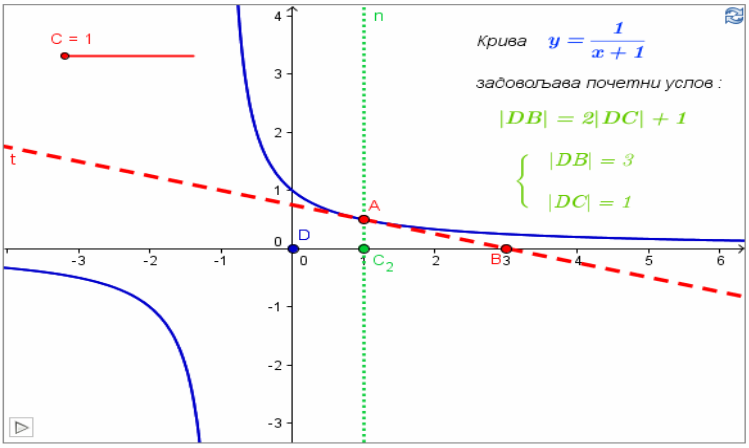
$$y = \frac{C}{x+1}, \quad C \neq 0.$$

Дакле, добили смо бесконачно много решења постављеног проблема. Њихови графици су све гране двеју фамилија хипербола.

- *Илустрација решења датог проблема*



Слика 6.1. *Графички приказ фамилије кривих које задовољавају дати услов*



Слика 6.2. *Графички приказ једне тражене криве која задовољава дати услов*

Пример 36. *Наћи све криве код којих је растојање тангенте у произвољној тачки од координатног почетка једнако апсциси тачке додира.*

Решење:

Једначину тражене криве означимо са $y = f(x)$, $x > 0$. Нека је $A(x, y)$ произвољна тачка криве и t тангента криве у тој тачки. Тада је једначина тангенте t:

$$Y - y = f'(x)(X - x)$$

где су (X, Y) текуће координате.
Растојање тангенте од координатног почетка рачунамо помоћу формуле за растојање тачке (x_0, y_0) од праве $Ax + By + C = 0$

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

У овом случају је тачка $(0, 0)$, а права $t : y'X - Y + y - y'x = 0$, па имамо да је

$$\left| \frac{-xy' + y}{\sqrt{y'^2 + 1}} \right| = x \ \Big/^2$$

Када квадрирамо и измножимо добијамо

$$y^2 - 2xyy' = x^2 \quad / : 2xy \neq 0$$

$$y' = \frac{1}{2}\Big(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\Big).$$

То је хомогена диференцијална једначина првог реда. Једначину тражене криве ћемо добити као решење ове једначине.
Уведимо смену $y = ux \quad \Rightarrow y' = u + xu'$. Тада је

$$u + xu' = \frac{1}{2}\Big(u - \frac{1}{u}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad xu' = -\frac{1}{2}u - \frac{1}{2u}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{-u^2-1}{2u}\qquad\Leftrightarrow\qquad\frac{dx}{x}=-\frac{2udu}{u^2+1}$$

Сменом $t=u^2+1$, $\quad dt=2udu$ интеграл на десној страни се своди на $\displaystyle\int\frac{dt}{t}$, па ће бити

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dt}{t}\qquad\Rightarrow\qquad\ln|x|=-\ln|t|+C_1\qquad\Rightarrow\qquad\ln|xt|=C_1,$$

односно

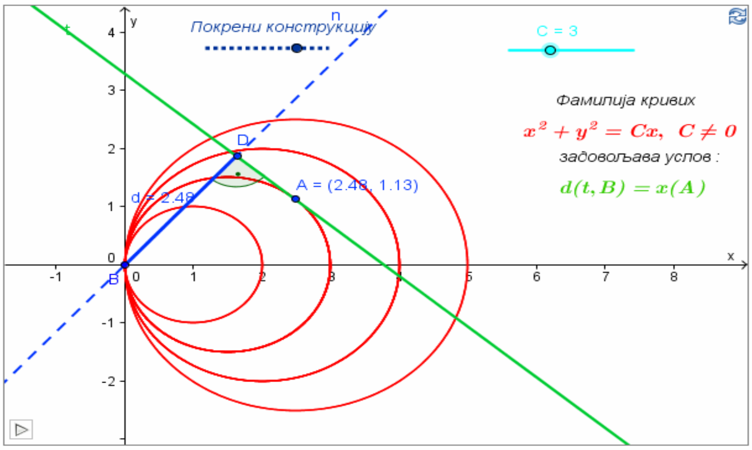
$$x(u^2+1)=C,\qquad C=\pm\, e^{C_1}.$$

Када вратимо смену $u=\frac{y}{x}$ добијамо опште решење дате диференцијалне једначине

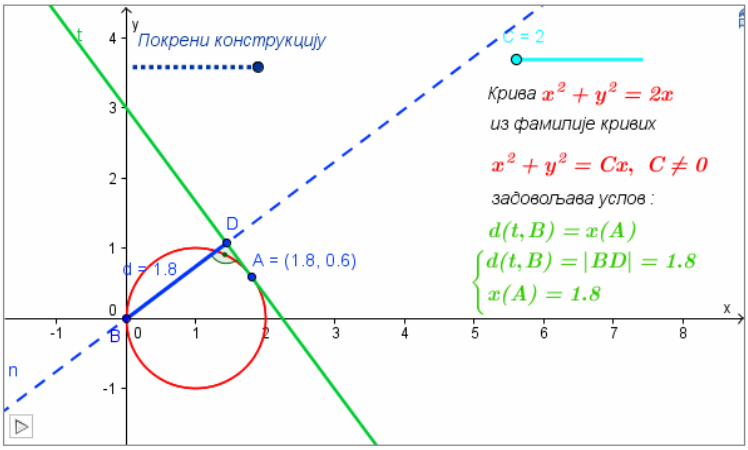
$$x\Big(\frac{y^2}{x^2}+1\Big)=C\qquad\Leftrightarrow\qquad y^2+x^2=Cx.$$

Дакле, тражене криве представљају фамилију кружница $y^2+x^2=Cx$, где је $C\neq 0$ произвољна константа.

- *Графички приказ неких кривих из фамилије $x^2+y^2=Cx$ које задовољавају услов $d(t,B)=|BD|=x(A)$ (где је D подножје нормале из тачке B на тангенту t, а $x(A)$ апсциса тачке додира A).*



Слика 6.3. *Графички приказ фамилије кривих које задовољавају дати услов*



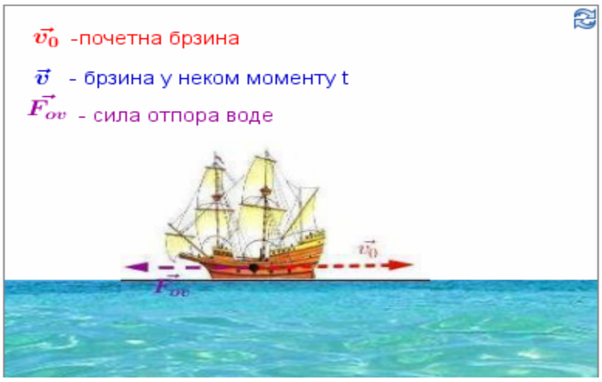
Слика 6.4. *Графички приказ једне тражене криве која задовољава дати услов*

Већина примера се заснива на [1] и [2].

6.2 Примена диференцијалних једначина у физици

Као што смо већ споменули, диференцијалне једначине су присутне и у физици. На примерима који следе видећемо како помоћу диференцијалних једначина можемо доћи до закона праволинијског кретања брода, закона кретања тела при слободном паду. Такође, помоћу диференцијалних једначина се описује кретање тела које осцилује.

Пример 37. *Брод тежине Q_b са посадом тежине Q_p креће се праволинијски по површини мирне воде почетном брзином v_0. Одредити једначину кретања брода, ако је отпор воде пропорционалан брзини.*



Слика 6.5. *Анимација кретања брода*

Решење:

Нека је $v = v(t)$ брзина брода у моменту t и нека је $\vec{F_{ov}}$ сила отпора воде. Како је, из услова задатка, отпор воде пропорционална брзини следи да је

$\vec{F_{ov}} = k\vec{v}$, где је $k > 0$ коефицијент пропорционалности.
Из *II Њутновог закона*
$$m\vec{a} = \vec{F},$$
где је $\vec{a}$ убрзање тела, а $\vec{F}$ сума свих сила које делују на тело масе m, добијамо
$$m\vec{a} = \vec{F_{ov}} \quad \Rightarrow \quad ma = -F_{ov}.$$
У последњој једнакости нам се јавља $-F_{ov}$ јер сила отпора воде има супротан смер од смера кретања брода са посадом.
Знамо да је убрзање тела промена брзине у времену, па то пишемо на следећи начин
$$a = \frac{dv}{dt}.$$
Када заменимо убрзање и силу отпора воде у једнакост $ma = -F_{ov}$ добијамо
$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v.$$

Сада ћемо масу брода m_b и масу посаде m_p да изразимо преко њихових тежина:
$$Q_b = m_b \cdot g \quad \Rightarrow \quad m_b = \tfrac{Q_b}{g}$$
$$Q_p = m_p \cdot g \quad \Rightarrow \quad m_p = \tfrac{Q_p}{g}$$
где је g гравитациона константа.
Укупна маса тела m ће да буде збир масе брода и масе посаде јер посматрамо посаду и брод као један систем, односно једно тело које се креће брзином v.
Дакле,
$$m = m_b + m_p\,,$$
односно
$$m = \frac{Q_b}{g} + \frac{Q_p}{g} = \frac{1}{g}(Q_b + Q_p).$$
Заменом добијене масе у једнакост $m \cdot \dfrac{dv}{dt} = -k \cdot v$ добијамо
$$\frac{1}{g}(Q_b + Q_p) \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v.$$
Ово је диференцијална једначина која раздваја променљиве
$$\frac{dv}{v} = \frac{-kg}{Q_b + Q_p}dt.$$

Када интегралимо претходну једнакост
$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{-kg}{Q_b + Q_p}dt$$
добијамо
$$\ln|v| = \frac{-kg}{Q_b + Q_p} \cdot t + C_1$$

односно, након антилогаритмовања,

$$|v| = e^{\dfrac{-kg}{Q_b + Q_p}\cdot t} \cdot e^{C_1}$$

Нека је $C = \pm e^{C_1}$, тада ће бити

$$v(t) = C \cdot e^{\dfrac{-kg}{Q_b + Q_p}\cdot t}.$$

Из услова задатка да је почетна брзина једнака v_0, односно $v(0) = v_0$ добијамо да је $C = v_0$, па је закон кретања брода

$$v(t) = v_0 \cdot e^{\dfrac{-kg}{Q_b + Q_p}\cdot t}.$$

Осцилације и диференцијалне једначине

Помоћу диференцијалних једначина можемо описати кретања тела која осцилују.

- Посматраћемо осциловање тела под дејством еластичне силе
  Претпоставимо да на тело окачено о еластичну опругу делује само сила која тежи да врати тело у равнотежни положај. То је еластична сила деформисане опруге која је, према Хуковом [9] закону, сразмерна померању:

  $$\vec{F} = -k\vec{x}, \qquad k - \text{коефицијент еластичности опруге}$$

  Знак '-' значи да сила F делује у супротном смеру од вектора положаја x тела везаног за опругу.
  Из II Њутновог закона $m\vec{a} = \vec{F}$ следи једначина кретања:

  $$m\vec{a} = -k\vec{x} \quad \Rightarrow \quad ma = -kx \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

  односно

  $$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

  Ако уведемо смену $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$, добијамо једначину осциловања тела

  $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

  Како је $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{dx}{dt}\Big) = \dfrac{dv}{dt}$ имаћемо да је

  $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x$$

[9] Robert Hooke (1635-1703), енглески физичар

$$\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\omega^2 x \quad \Leftrightarrow \quad v\frac{dv}{dx} = -\omega^2 x.$$

Добили смо диференцијалну једначину која раздваја променљиве

$$vdv = -\omega^2 x dx \quad \Big/ \int$$

$$\frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$v = \sqrt{2C_1 - \omega^2 x^2}$$

Заменимо v са $\frac{dx}{dt}$, тада је

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2C_1 - \omega^2 x^2}$$
$$\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{\frac{2C_1}{\omega^2} - x^2}$$

Нека је $a^2 = \frac{2C_1}{\omega^2}$, тада добијамо диференцијалну једначину која раздваја променљиве

$$\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{a^2 - x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \omega dt$$

$$\arcsin\frac{x}{a} = \omega t + \varphi \quad \Big(-\arccos\frac{x}{a} = \omega t + \varphi\Big)$$

$$\frac{x}{a} = \sin(\omega t + \varphi) \quad \Big(\frac{x}{a} = \cos(\omega t + \varphi)\Big)$$

$$x = a\sin(\omega t + \varphi) \quad (x = a\cos(\omega t + \varphi))$$

Добили смо елонгацију $x(t)$ која се у току времена t мења по синусном (или косинусном) закону

$$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi) \quad (x(t) = a\cos(\omega t + \varphi)).$$

при чему је :

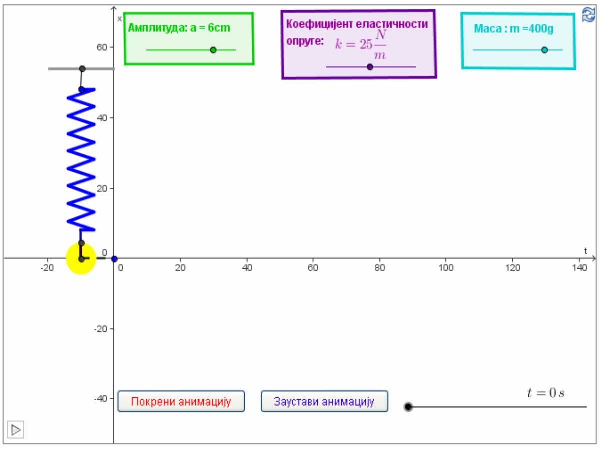
- x - *елонгација* (удаљеност тела од равнотежног положаја у неком тренутку t)
- $a = \sqrt{\frac{2C_1}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{2C_1 m}{k}}$ - *амплитуда* (максимално померање тела од равнотежног положаја)
- φ - *почетна фаза осциловања* (осциловање у почетном тренутку $t = 0$)
- $\omega t + \varphi$ - *фаза осциловања* (одређује вредност померања x у датом тренутку t)

– $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ - *кружна фреквенција* (број радијана за који се промени фаза осциловања у јединици времена)

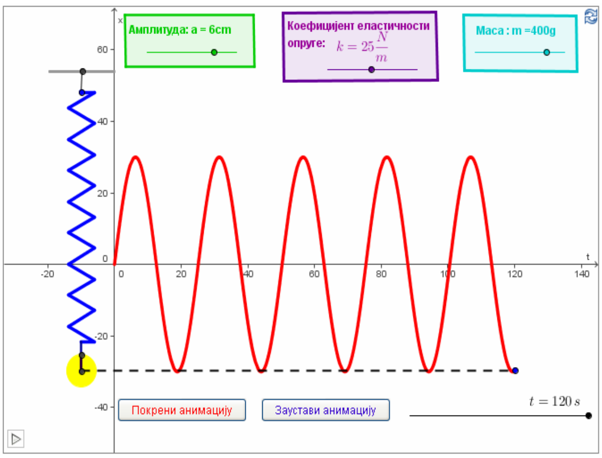
– $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ - *период осциловања* (најмањи интервал времена за који тело изврши једну осцилацију)

– $f = \dfrac{1}{T}$ - *фреквенција осциловања* (број осцилација у јединици времена)

Детаљније се може видети у [5].



Слика 6.6. *Анимација зависности елонгације x од времена t*



Слика 6.7. *Крај анимације зависности елонгације x од времена t*

- Посматраћемо осциловање тела под дејством еластичне силе и силе отпора средине (*пригушене осцилације*)

  Пригушене осцилације су осцилације у којима амплитуда опада са временом.

  Узрок пригушења налази се у дејству спољашњих сила, нпр. силе трења или силе отпора средине.

  Претпоставимо да на тело окачено о еластичну опругу делује еластична сила опруге и сила отпора средине.

  За мале брзине кретања осцилатора, силе отпора средине, према Стоксовом [10] закону, пропорционалне су брзини кретања тела (детаљније у [5])

  $$\vec{F} = -b\vec{v}, \qquad b - \text{коефицијент пригушења}$$

  Из II Њутновог закона $m\vec{a} = \vec{F}$ следи једначина кретања:

  $$m\vec{a} = -k\vec{x} - b\vec{v} \quad \Rightarrow \quad ma = -kx - bv$$

  $$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

  односно

  $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}\cdot x = 0.$$

  Нека су $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ и $2\lambda = \dfrac{b}{m}$ позитивне величине, тада добијамо једначину

  $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

  Уведимо смену $x = ze^{-\lambda t}$, где је λ нова променљива. Тада је :

  $$\frac{dx}{dt} = e^{-\lambda t}\frac{dz}{dt} - \lambda e^{-\lambda t}z$$

  $$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-\lambda t}\frac{d^2z}{dt^2} - 2\lambda e^{-\lambda t}\frac{dz}{dt} + \lambda^2 e^{-\lambda t}z$$

  Заменом добијених вредности у једначину $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ и сређивањем добијамо

  $$\frac{d^2z}{dt^2} = -(\omega_0^2 - \lambda^2)z.$$

  Нека је $\omega = \omega_0^2 - \lambda^2 > 0$, тада је

  $$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z$$

  Решавање једначине овог типа смо већ видели у претходном примеру са осцилацијама, па се на исти начин добија да је решење

  $$z = a\sin(\omega t + \varphi) \quad (z = a\cos(\omega t + \varphi))$$

[10] Sir George Gabriel Stokes (1819-1903), британски математичар и физичар

Када вратимо смену $x = ze^{-\lambda t}$, добијамо елонгацију $x(t)$

$$x(t) = ae^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi),$$

односно

$$x(t) = A(t) \sin(\omega t + \varphi) \quad (x(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi)),$$

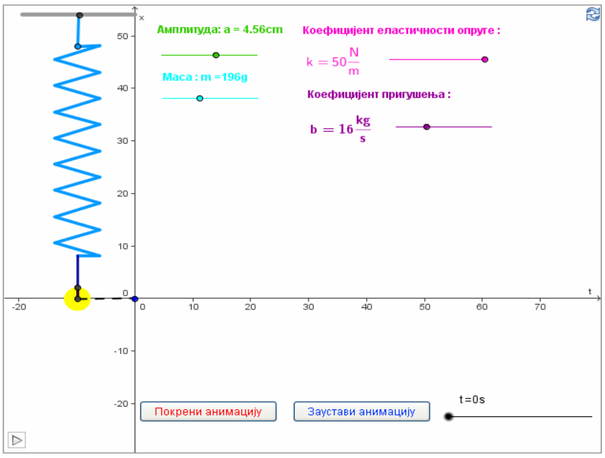
где је $A(t) = ae^{-\lambda t} = ae^{-\frac{b}{2m}t}$.

Можемо приметити да се амплитуда пригушених осцилација смањује са временом осциловања утолико брже уколико је коефицијент отпора средине већи, а маса тела мања.
Код пригушених осцилација кружна фреквенција ω је једнака

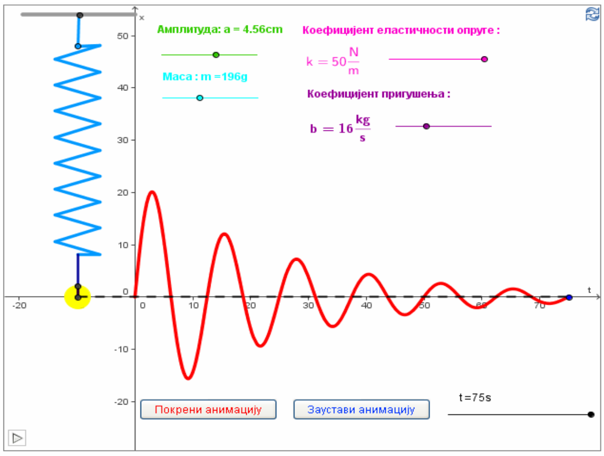
$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2 = \frac{4km - b^2}{4m^2}$$

и показује број пролаза тела кроз равнотежни положај за време од π секунди, а период пригушења осцилација је једнак

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4m\pi}{\sqrt{4km - b^2}}$$



Слика 6.8. *Анимација зависности елонгације x од времена t код пригушених осцилација*



Слика 6.9. *Крај анимације зависности елонгације x од времена t код пригушених осцилација*

6.3 Још неке примене диференцијалних једначина

У економији се цена производа обично прати у одређеном временском периоду. Зато је цену природно посматрати као функцију времена. Ако цена $p(t)$ неког производа достиже граничну вредност $\overline{p}$, када $t \to \infty$, тада се каже да је цена производа *динамички стабилна*, а $\overline{p}$ се назива *равнотежна цена.* Да би се производ продао по што повољнијој цени, онда она мора бити обрнуто сразмерна својој промени у неком (краћем) временском периоду. Тако је омогућено формирање одређене диференцијалне једначине коју та цена задовољава.

Пример 38. *Нека цена $p(t)$ производа задовољава диференцијалну једначину*

$$\frac{dp}{dt} = 10 - 0.5p, \quad t \geq 0$$

1. *Наћи $p(t)$ и израчунати $\overline{p}$ као $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)$*
2. *У истом координатном систему нацртати три парцијална решења која редом задовољавају почетне услове*

   $$p(0) = 40, \quad p(0) = 10 \quad i \quad p(0) = 20.$$

3. *Анализирати понашање цене током дугог временског периода.*

Решење:

1. Диференцијалну једначину коју задовољава цена производа можемо записати у облику

$$\frac{dp}{10 - 0.5p} = dt$$

и то је диференцијална једначина која раздваја променљиве.
Након интеграције

$$\int \frac{dp}{10 - 0.5p} = \int dt$$

добијамо

$$\ln|10 - 0.5p| = -0.5t + C_2,$$

односно

$$10 - 0.5p = C_1 \cdot e^{-0.5t},$$

где је $C_1 = \pm e^{C_2}$.
Сређивања претходне једнакости добијамо да је

$$p(t) = 20 - Ce^{-0.5t},$$

при чему је $C = e^{C_1}$.
Израчунајмо сада равнотежну цену $\overline{p}$ као

$$\overline{p} = \lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} (20 - \frac{C}{e^{0.5t}}) = 20.$$

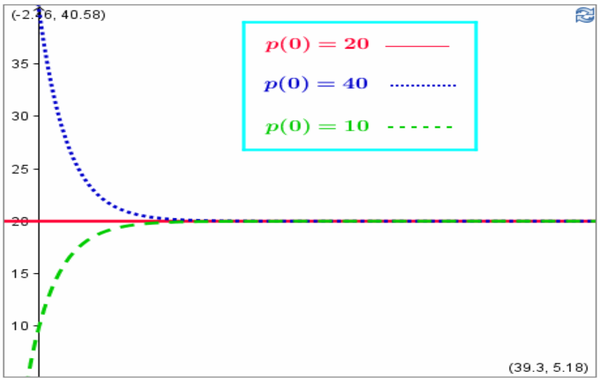
Дакле, полазна диференцијална једначина се може записати у облику

$$\frac{dp}{dt} = 0.5(20 - p)$$

одакле се може закључити да је стопа промене цене p, с обзиром на време t, пропорционална разлици између њене тренутне вредности и граничне вредности 20.
Из тог разлога се каже да ова диференцијална једначина представља *закон ограниченог раста.*

2. Из датих почетних услова одредићемо тражена партикуларна решења.

$p(0) = 40$	$p(0) = 10$	$p(0) = 20$
$p(0) = 20 - C$	$p(0) = 20 - C$	$p(0) = 20 - C$
$40 = 20 - C$	$10 = 20 - C$	$20 = 20 - C$
$C = 20$	$C = 10$	$C = 0$
$p(t) = 20 + 20e^{-0.5t}$	$p(t) = 20 - 10e^{-0.5t}$	$p(t) = 20$



Слика 6.10. *Графички приказ тражених партикуларних решења*

3. Како је равнотежна цена $\overline{p} = 20$, видимо да она не зависи од константе C, нити од броја $p(0)$ који представља почетну вредност функције цене.
   На основу слике 6.10. где су приказана партикуларна решења за дате почетне услове, може се закључити следеће:
   - ако је $p(0) > \overline{p}$, онда цена опада и има граничну вредност $\overline{p}$.
   - ако је $p(0) < \overline{p}$, онда цена расте и такође има граничну вредност $\overline{p}$.
   - ако је $p(0) = \overline{p}$, тада цена остаје стална и не зависи од времена t.

Диференцијалне једначине се јављају и у биологији, на пример, код експоненцијалног раста (распадања) популације бактерија.

Пример 39. *Нека је $N(t)$ број јединки једне популације бактерија у моменту t и претпоставимо да је стопа раста (распадања) популације бактерија пропорционална са $N(t)$, при чему ћемо константу пропорционалности k звати фактором раста, ако је $k > 0$ (фактор распадања, ако је $k < 0$).*

1. *Ако се јадна популација бактерија дуплира за 24 сата, колико времена је потребно да би се она повећала 10 пута?*
2. *Ако је коефицијент пропорционалности $k = -2$, одредити време полураспада, односно време потребно да се полазни број јединки популације преполови.*

Претпостављамо да је ова популација у моменту $t = t_0 = 0$ била једнака N_0 јединки.

Решење:

Из услова задатка је стопа раста популације, односно $\dfrac{dN}{dt}$, пропорционална са $N(t)$, при чему коефицијент пропорционалности k налазимо

из услова дуплирања популације.
Дати проблем можемо представити математичким моделом диференцијалне једначине облика

$$\frac{dN}{dt} = kN(t)\ , \quad N(0) = N_0.$$

Ово је једначина која раздваја променљиве

$$\frac{dN}{N(t)} = kdt \quad \Big/ \int$$

Након интеграције имаћемо

$$\ln|N(t)| = kt + C_1 \quad \Rightarrow \quad N(t) = Ce^{kt},$$

где је $C = \pm\, e^{C_1}$.

Из почетног услова $N(0) = N_0$ следи да је $C = N_0$, па је решење облика

$$N(t) = N_0 e^{kt}.$$

1. Како се једна популација бактерија дуплира за 24 h, имаћемо да је

$$N(24) = 2N_0 \quad \Rightarrow \quad N_0 e^{24k} = 2N_0,$$

$$e^{24k} = 2 \quad \Big/ \ln$$

$$24k = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln 2}{24} = 0.029.$$

Дакле, одредили смо коефицијент пропорционалности $k = 0.029$. Сада треба одредити колико је времена потребно да се популација увећа 10 пута, односно да нађемо t_1 такво да је

$$N(t_1) = 10N(0) = 10N_0 \quad \Rightarrow \quad N_0 e^{t_1 k} = 10N_0,$$

$$e^{t_1 k} = 10 \quad \Big/ \ln$$

$$t_1 k = \ln 10 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\ln 10}{k} = 24\frac{\ln 10}{\ln 2} = 79,726h.$$

Дакле, потребно је 79,726 h $\approx$ 3 dana 7 sati 44 minuta.

2. U ovom slučaju treba odrediti vreme t_2 potrebno da broj jedinki populacije bude jednak $\frac{N_0}{2}$, odnosno

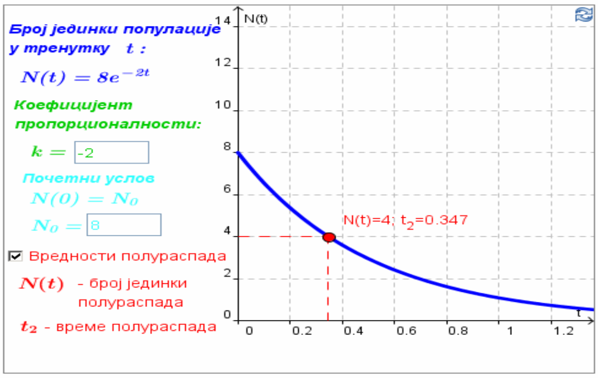
$$N(t_2) = \frac{N_0}{2}.$$

Kako je $N(t) = N_0 e^{kt}$ i $k = -2$ imaćemo da je

$$N(t_2) = N_0 e^{-2t_2} = \frac{N_0}{2},$$

$$e^{-2t_2} = \frac{1}{2} \Big/ \ln$$

$$-2t_2 = -\ln 2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{\ln 2}{2} = 0.347.$$



Слика 6.11. *Илустрација експоненцијалног раста и распадања популације бактерија*

Наредни пример илуструје коришћење диференцијалних једначина као математичког модела за решавање неких хемијских проблема.

Пример 40. *Једна хемикалија се раствара у води брзином која је пропорционална производу нерастворене количине и разлике између концентрације у засићеном раствору и постојећем раствору. Познато је да је у* 100 *грама засићеног раствора растворено тачно* 60 *грама. Ако је* 40 *грама те хемикалије стављено у* 100 *грама воде и ако се после* 2 *сата растворило* 10 *грама, колико ће бити растворено после* 6 *сати?*

Решење:

Означимо са $H(t)$ количину нерастворене хемикалије у грамима у тренутку t. Нека је k коефицијент пропорционалности.
Ако је убачено 40 грама, у тренутку t ће бити растворено $40 - H(t)$. Дакле, према услову задатка, биће

$$\frac{dH}{dt} = kH(t)\Big(\frac{60}{100} + \frac{40 - H(t)}{100}\Big)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{dH}{dt} = kH(t)\Big(\frac{1}{5} + \frac{H(t)}{100}\Big)$$

У задатку нам је још дато да је $H(0) = 40$ и $H(2) = 40 - 10 = 30$.
Сада се наш проблем своди на решавање почетног проблема диференцијалне једначине која раздваја променљиве

$$\frac{dH}{H(t)(20 + H(t))} = \frac{k}{100}dt.$$

Након интеграције леве и десне стране добијамо

$$\ln\left|\frac{H(t)}{H(t) + 20}\right| = \frac{k}{20}(t + C) \quad \Big/ \; e$$

$$\frac{H(t)}{H(t)+20} = e^{\frac{k}{5}(t+C)}.$$

Сређивањем последње једнакости добијамо

$$\frac{H(t)}{H(t)+20} = \frac{1}{e^{-\frac{k}{5}(t+C)}} \quad \Rightarrow \quad H(t) = \frac{20}{e^{-\frac{k}{5}(t+C)}-1}.$$

Заменом почетних услова $H(0) = 40$ и $H(2) = 30$ у ову једнакост добијамо систем од две једначине са две непознате

$$\begin{aligned} kC &= -5\ln\tfrac{3}{2} \\ k(2+C) &= -5\ln\tfrac{5}{3} \end{aligned}$$

Решавањем система добијамо вредност коефицијента пропорционалности k и константе C:

$$k = \frac{5}{2}\ln\frac{9}{10} \quad \text{и} \quad C = 2\frac{\ln\frac{3}{2}}{\ln\frac{10}{9}}.$$

Заменом добијених вредности у једнакост

$$H(t) = \frac{20}{e^{-\frac{k}{5}(t+C)}-1}$$

и сређивањем добијеног израза имаћемо да је

$$H(t) = \frac{20}{\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^t - 1}.$$

Након 6 сати количина нераствореног је $H(6)$, па ће количина растворене хемикалије бити

$$40 - H(6) = 40 - \frac{20}{\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^6 - 1} = 21.09 \text{ грама.}$$

Диференцијалне једначине се могу јавити и код израчунавања укупног прираштаја становништва неког места.

Пример 41. *За прираштај становништва великог града важе следећа два закона:*

1. *Природни прираштај становништва пропорционалан је броју становника у временском интервалу:*

$$\Delta y_1 = k_1 y \Delta t$$

2. *Брзина пораста становништва путем имиграције пропорционална је са временом:*

$$\Delta y_2 = k_2 t \Delta t$$

Написати израз $y(t)$ за укупни прираштај становништва, па затим наћи зависност броја становника града од времена, ако је у тренутку $t = t_0 = 0$ било $y(0) = y_0$ становника.

Решење:

Из услова задатка имамо

$$\Delta y_1 = k_1 y \Delta t \quad \Rightarrow \quad \tfrac{\Delta y_1}{\Delta t} = k_1 y$$

$$\Delta y_2 = k_2 t \Delta t \quad \Rightarrow \quad \tfrac{\Delta y_2}{\Delta t} = k_2 t$$

Заменом односа прираштаја броја становника и прираштаја одговарајућег времена односима њихових диференцијала добијамо

$$\frac{dy_1}{dt} = k_1 y, \quad \frac{dy_2}{dt} = k_2 t$$

Тада је укупан прираштај

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = k_1 y + k_2 t.$$

Добили смо линеарну диференцијалну једначину првог реда

$$y' - k_1 y = k_2 t$$

Одредимо њено опште решење:

$$P(t) = -k_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = -\int k_1 dt = -k_1 t$$

$$Q(t) = k_2 t \quad \Rightarrow \quad I_2 = k_2 \int t e^{-k_1 t} dt.$$

Интеграл I_2 ћемо решити парцијалном интеграцијом:

$$I_2 = \left\{ u = t,\ du = dt; \quad dv = e^{-k_1 t} dt,\ v = -\frac{1}{k_1} e^{-k_1 t} \right\}$$

$$I_2 = k_2 \left(-\frac{t}{k_1} e^{-k_1 t} + \int \frac{1}{k_1} e^{-k_1 t} dt \right) = k_2 \left(-\frac{t}{k_1} e^{-k_1 t} - \frac{1}{k_1^2} e^{-k_1 t} \right).$$

Опште решење ће бити

$$y(t) = e^{k_1 t} \left(-\frac{k_2 t}{k_1} e^{-k_1 t} - \frac{k_2}{k_1^2} e^{-k_1 t} + C \right),$$

односно

$$y(t) = C e^{k_1 t} - \frac{k_2}{k_1^2}(k_1 t + 1)$$

и то је израз за укупни прираштај становништва.
Из почетног услова $y(0) = y_0$ добијамо да је

$$y(0) = C - \frac{k_2}{k_1^2} = y_0 \quad \Rightarrow \quad C = y_0 + \frac{k_2}{k_1^2}.$$

Заменом вредности константе C у опште решење $y(t)$ биће

$$y(t) = (y_0 + \frac{k_2}{k_1^2})e^{k_1 t} - \frac{k_2}{k_1^2}(k_1 t + 1).$$

Последњи израз даје зависност броја становника града од времена.

7 Закључак

Веома значајан проблем, који је последњих година разматран како са становишта науке, тако и са становишта примене у образовању, јесте визуелизација у математичком образовању, односно визуелно представљање математичких садржаја. Визуелизација има важну улогу у истраживањима и савременим методама наставе јер омогућује лакши начин за разумевање и усвајање нових концепата, не само у разним областима математике већ и у многим другим наукама. За визуелно представљање математичких садржаја постоји неколико програмских пакета. У мастер раду је коришћена ГеоГебра, програм за динамичку математику који повезује анализу, алгебру и геометрију, а који је развио Маркус Хоенвартер (Markus Hohenwarter) и међународни тим програмера, за наставу и учење математике у школама (детаљније у [8]). Основна идеја ГеоГебре је да се у сваком тренутку обезбеде две упоредне репрезентације сваког математичког објекта, у алгебарском и графичком прозору. Свака измена на објекту у било ком прозору истовремено мења његову репрезентацију у другом прозору, чиме се долази до интерактивности.

Сам мастер рад је осмишљен као додатни материјал за предавања о диференцијалним једначинама на природним факултетима јер се већи део рада заснива на садржајима из [1]. Циљ овог рада, реализованог у виду електронских лекција, јесте визуелизација неких апстрактних појмова и решења диференцијалних једначина и прављење интерактивних садржаја. То би требало да допринесе бољем разумевању и лакшем савладавању одређеног градива из теорије диференцијалних једначина, као и већој заинтересованости студената за овакав облик рада, а што би вероватно довело и до већег напретка и успеха у учењу.
Такође, презентовање садржаја о диференцијалним једначинама путем електронских лекција даје могућност сталног приступа теорији и задацима, путем интернета, као и могућност њиховог мењања, усавршавања и додавања нових материјала.

Литература

[1] Олга Хаџић, Ђурђица Такачи, *,,Математика за студенте природних наука"*, Нови Сад, Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет у Новом Саду, 1998.г.

[2] Радоје Шћепановић, Јулка Кнежевић-Миљановић, Љубомир Протић, *,,Диференцијалне једначине"*, Математички факултет, Београд, 2008.г.

[3] Светлана Јанковић, Јулка Кнежевић-Миљановић, *,,Диференцијалне једначине I - задаци са елементима теорије"*, Математички факултет, Београд, 2007.г.

[4] Милорад Бертолино, *,,Диференцијалне једначине"*, Научна књига, Београд, 1980.г.

[5] Татјана Вуковић, *,,Методе математичке физике" - скрипта за смер Општа физика*, Физички факултет, Београд, 2012.г.

[6] Тадија Пејовић, *,,Диференцијалне једначине - егзистенција решења"*, Грађевинска књига, Београд, 1958.г.

[7] Славко Крунић, *,,Диференцијалне једначине - обрада у машинској школи" - специјалистички рад*, Нови Сад, 2008.г.

[8] www.geogebra.org